

Investigations on the Ski-Snow Contact in Alpine Skiing

**Untersuchungen zum
Ski-Schnee Kontakt im Skilauf**

Martin Mössner

Rigorousumsvortrag
7. November 2006

Fernziel

- Am ISW ist es ein Ziel, das Skifahren in realistischer Weise zu simulieren (Skifahrer, Ski, Schnee, Skipiste)

Dissertation

- Methoden zur Erfassung der Bewegung von Skifahrern
- Methoden zur Bestimmung von Ski- und Schneeeigenschaften
- Ski-Schnee Kontakt bei geschnittenen Schwüngen

Derzeitiger Stand

- Simulation der Bewegung eines starren Skischlittens mit modellierten Skiern und Schneeeigenschaften auf ebener Piste

5 Artikel

- A Method for Obtaining 3-D Data in Alpine Skiing Using Pan and Tilt Cameras with Zoom Lenses. ASTM STP 1266, Vortrag: Zell am See
- Determination of Kinetic Friction and Drag Area in Alpine Skiing. ASTM STP 1266
- A Video Technique for Obtaining 3-D Coordinates in Alpine Skiing. J. Appl. Biomech. 12
- Einfluss der Skitailierung auf Schwungradradius und Belastung. Sportverletzung Sportschaden 11
- Pressure Distribution Under a Ski During Carved Turns. Science and Skiing II

7 Abstracts

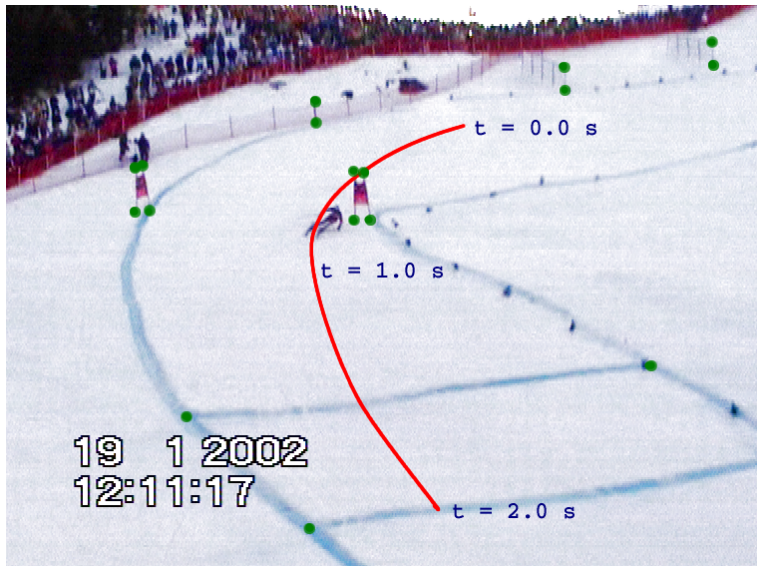
- Determination of Kinetic Friction in Downhill Skiing
- Smoothing the DLT-Parameters for Moved Cameras
- Pressure Distribution Under an Edged Ski
- Track Analysis of Giant Slalom Turns of World Cup Racers
- Mechanical Properties of Snow on Ski Slopes
- Snow Friction and Drag in Alpine Downhill Racing
- Modeling of the Ski-Snow Contact for a Carved Turn

3-D Rekonstruktion von Videodaten

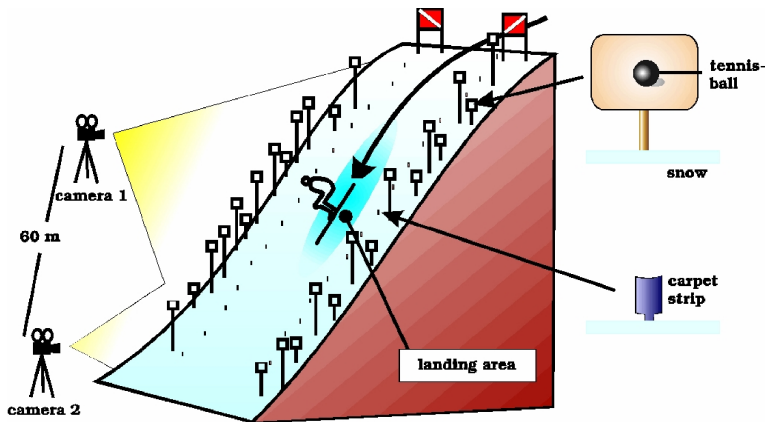
Ski-Schnee Kontakt bei geschnittenen Schwüngen

3-D Rekonstruktion von Videodaten

3-D Rekonstruktion: Aufzeichnung



3-D Rekonstruktion: Szenario



3-D Rekonstruktion: Direkte Lineare Transformation

$$x = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + 1} ,$$
$$y = \frac{b_5 X + b_6 Y + b_7 Z + b_8}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + 1} .$$

x, y	Bildkoordinaten
X, Y, Z	Objektkoordinaten
$b_1, \dots, b_{11}$	DLT-Parameter

3-D Rekonstruktion: Bedingungsgleichung

- Hatze berichtet von der Existenz einer Nebenbedingung – gibt diese aber nicht an
- 11 DLT-Parameter können durch Polynome in den 10 Parametern α , β (Skalierung der Bildkoordinaten bzw. Brennweiten), u_0 , v_0 (Zentrum der Bildkoordinaten), X_0 , Y_0 , Z_0 (Zentrum der Objektkoordinaten) und $R(\phi, \theta, \psi)$ (allg. Drehung) dargestellt werden
- Obige Darstellung kann als Polynomgleichungssystem geschrieben werden $\rightarrow$ Buchberger Algorithmus
- Orthogonalitätsrelationen für R führen schnell zum Ziel

$$(b_9^2 + b_{10}^2 + b_{11}^2)(b_1 b_5 + b_2 b_6 + b_3 b_7) = \\ (b_1 b_9 + b_2 b_{10} + b_3 b_{11})(b_5 b_9 + b_6 b_{10} + b_7 b_{11})$$

3-D Rekonstruktion: Kalibrierung

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_i X_i & -x_i Y_i & -x_i Z_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & 1 & -y_i X_i & -y_i Y_i & -y_i Z_i \end{pmatrix}_{i=1,\dots,p}$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{11})^t \quad \mathbf{r} = (x_i, y_i)_{i=1,\dots,p}^t$$

- Mindestens 6 Punkte mit bekannten Bild- und Objektkoordinaten (Passpunkte)
- Mit Bedingungsgleichung reichen 5 Passpunkte
- Praktisch sollten es 8 bis 12 sein

3-D Rekonstruktion: Rekonstruktion

$$\mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1^j - x^j b_9^j & b_2^j - x^j b_{10}^j & b_3^j - x^j b_{11}^j \\ b_5^j - y^j b_9^j & b_6^j - y^j b_{10}^j & b_7^j - y^j b_{11}^j \end{pmatrix}_{j=1,\dots,k}$$

$$\mathbf{s} = (X, Y, Z)^t \quad \mathbf{c} = (x^j - b_4^j, y^j - b_8^j)_{j=1,\dots,k}^t.$$

- Bilder von mindestens 2 synchronisierten Kameras

3-D Rekonstruktion: Lösung

- Überbestimmte lineare Gleichungssysteme
- Matrix und rechte Seite sind fehlerhaft
- → Ungenauigkeiten in Bildkoordinaten
- **Least Squares** Verfahren, z.B. mit **QR Zerlegung** (Golub und van Loan)
- **Total Least Squares** Verfahren (van Huffel und Vandewalle) benötigt **Singulärwertzerlegung**

3-D Rekonstruktion: Anwendung

- Jedes Bild jeder Kamera wird kalibriert – benötigt 6 Passpunkte pro Bild
- Bestimme Körperpunkt aus Kalibrierungsparametern und Bildpunkten von mindestens zwei Kameras

3-D Rekonstruktion: Besonderheiten im Skilauf

- Großes Kalibrierungsvolumen
- Kameras werden gezoomt, geschwenkt und bewegt
- Probleme: flacher Winkel zum Hang, Kälte, Nässe, Schnee, schlechte Lichtverhältnisse
- Im Wettkampf: mangelhafte Passpunktverteilung, keine Marker am Skifahrer, Beschränkungen durch Veranstalter etc.
- Daten müssen halbautomatisch digitalisiert werden
- Durch Bewegung des Skifahrers werden Körperpunkte verdeckt

3-D Rekonstruktion: ebene DLT

- Falls $Z = \alpha X + \beta Y$ gilt, d.h. die zu rekonstruierenden Körperpunkte liegen auf einer Ebene, so kann die DLT mit 8 Parametern geschrieben werden

$$x = \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{b_7 X + b_8 Y + 1} ,$$
$$y = \frac{b_4 X + b_5 Y + b_6}{b_7 X + b_8 Y + 1} .$$

- Nur 4 Passpunkte notwendig
- Nur 1 Kamera notwendig
- Siehe Abstract 4

3-D Rekonstruktion: Filtern bzw. Glätten

- Kameras werden nur langsam bewegt →
Kalibrierungsparameter und Bildkoordinaten sind glatte Funktionen der Zeit
- Filtern (digitale Filter, Wavelets) oder Glätten (Splines) der
Kalibrierungsparameter und/oder Bildkoordinaten
- Siehe Abstract 2

3-D Rekonstruktion: Nebenbedingungen

- Abstandsrelationen (Unterschenkellänge), Winkelbeziehungen, Ungleichungen
- Lösung mittels **Constrained Optimization**, z.B. Gill und Murray, Nag e04unf
- Verbesserung der Rekonstruktionsgenauigkeit
- Behandlung verdeckter Punkte

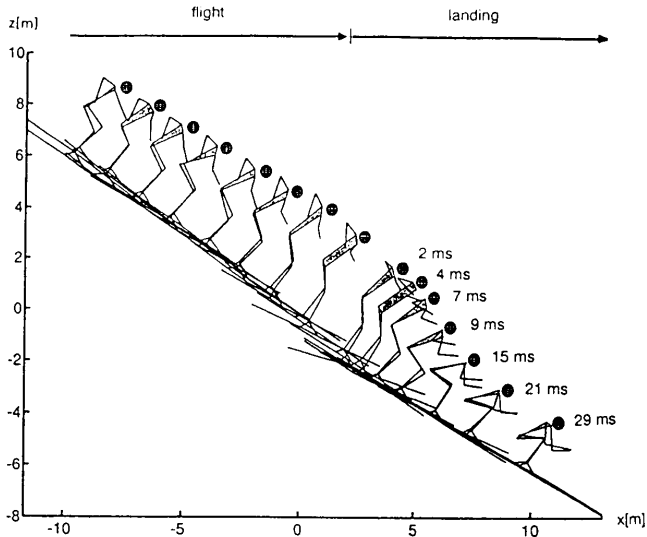
3-D Rekonstruktion: Software

- In Laborsituation kommerziell erhältliche Komplettsysteme verfügbar: MotionAnalysis, Vicon...
- Diese Systeme funktionieren beim Skifahren nicht, Gründe sind: großes Kalibrierungsvolumen, keine aktiven Marker, Lichtverhältnisse am Schnee...
- → Entwicklung eigener Software
- Programm **Digitize** zum Digitalisieren von Videobildern (Java Applikatin)
- Programm **F3D** zum Berechnung der 3-D Daten (Fortran Programm)

3-D Rekonstruktion: Olympiade Lillehammer



3-D Rekonstruktion: Olympiade Lillehammer

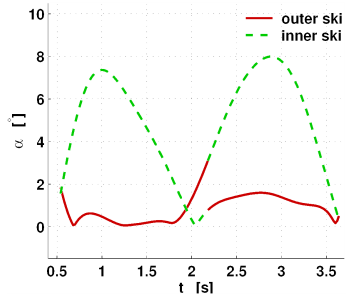
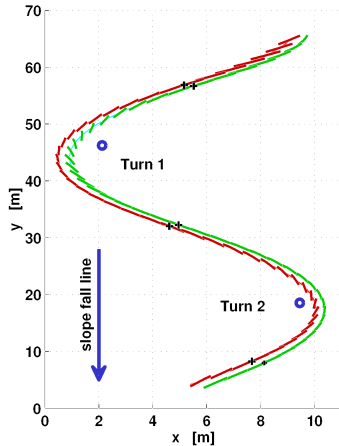


3-D Rekonstruktion: Olympiade Lillehammer

Zahl der Passpunkte	mittlerer Fehler [m]		
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
6	0.135	0.158	0.116
7	0.075	0.108	0.070
8	0.061	0.083	0.054
9	0.059	0.079	0.050
10	0.063	0.058	0.038

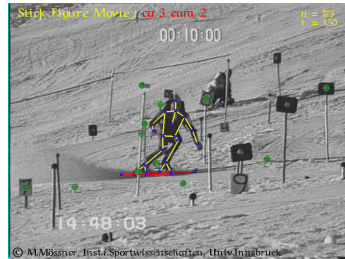
Mittlerer Fehler der 3-D Koordinaten eines festen Punktes in 10 aufeinanderfolgenden Bildern

3-D Rekonstruktion: Innerkrems: ebene DLT



Kaderfahrer rutschen bei geschnittenen Schwüngen mit 1 m/s

3-D Rekonstruktion: Lech

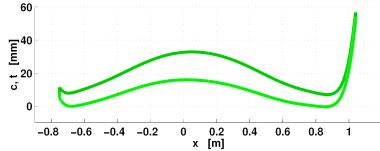
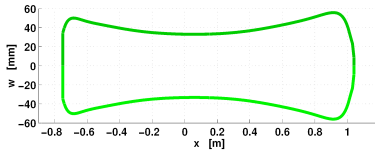


3-D Rekonstruktion: Lech

- Riesentorlaufschwung: 211 Bilder, mittlerer Fehler 3.36 cm pro Koordinate
- Carvingschwung: 300 Bilder, mittlerer Fehler 3.41 cm pro Koordinate
- Berechnung der Massen und Trägheitsmomente der Körpersegmente nach dem Modell von Hanavan
- Weitergabe der Daten an die TU Wien

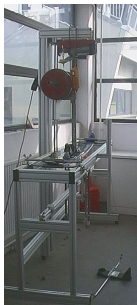
Ski-Schnee Kontakt bei geschnittenen Schwüngen

Druckverteilung: Geometrie des Ski



Grund- und Aufriss des Ski

Druckverteilung: Steifigkeit des Ski: Messung



Biegesteifigkeit

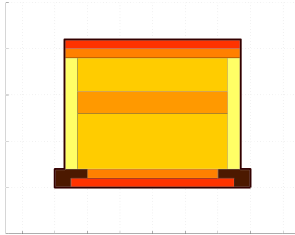
$$EI = -\frac{M}{h''}.$$

Biegemoment

$$M = F \frac{(b-p)(x-a)}{b-a} - F \begin{cases} 0, & a \leq x \leq p, \\ x - p, & p \leq x \leq b. \end{cases}$$

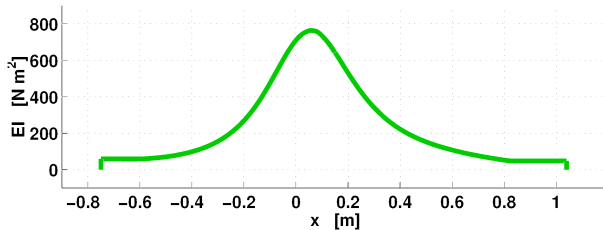
Finde h so, dass Messdaten der Biegelinie gut approximiert werden
und EI eine glatte Funktion ergibt

Druckverteilung: Steifigkeit des Ski: Berechnung



$$z_0(x) = \frac{\int_{A(x)} E(y, z) z \, dy \, dz}{\int_{A(x)} E(y, z) \, dy \, dz}, \quad EI(x) = \int_{A(x)} E(y, z) (z - z_0(x))^2 \, dy \, dz,$$
$$GJ(x) = 2 \int_{A(x)} G(x, y) \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (z - z_0(x)) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \, dy \, dz.$$

Druckverteilung: Steifigkeit des Ski

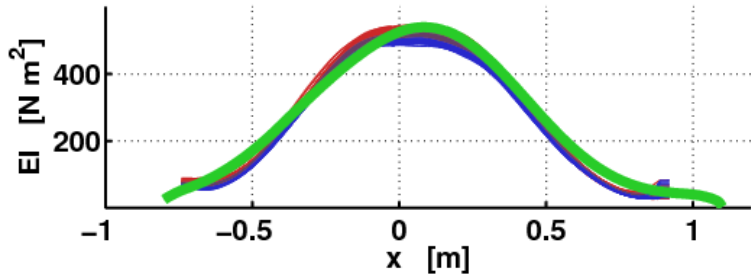


Biegesteifigkeit aus Messwerten

Torsionssteifigkeit wurde nicht gemessen

GJ aus EI mit $\nu = 0.33$.

Druckverteilung: Steifigkeit des Ski



Messung am Biegemessgerät des ISW
Modell nach Konstruktionsdaten von Head

Druckverteilung: Biegung und Torsion des Ski im Schnee

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2}{dx^2} h \right) = f(x, w, d, c, h, \varphi, F_z, M_y, \rho, k),$$

$$\frac{d}{dx} \left(GJ \frac{d}{dx} \varphi \right) = -m(x, w, d, c, h, \varphi, M_x, k),$$

$$h''(x_T) = h'''(x_T) = h''(x_S) = h'''(x_S) = 0, \quad \varphi'(x_T) = \varphi'(x_S) = 0.$$

Linienlast $f = f_1 + f_2 + f_3$ und Linienmoment $m = m_1 + m_3$ setzen sich aus 3 nichtlinearen Anteilen zusammen

- Belastung durch den Skifahrer $f_1(x, F_z, M_y)$, $m_1(x, M_x)$
- Eigengewicht des Ski $f_2(x, \varphi, \rho)$
- Schneereaktionskräfte $f_3(x, w, d, c, h, \varphi, k)$,
 $m_3(x, w, d, c, h, \varphi, k)$

Druckverteilung: Schneekräfte

$$p(x, y) = \begin{cases} k e(x, y), & \text{if } e \geq 0, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Weicher Schnee: $k = 6.25 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$

$$f_3(x) = \int k e(x, y) dy = \frac{-k}{2 \tan \varphi(x)} (e_2^2(x) - e_1^2(x)),$$

$$m_3(x) = \int k y e(x, y) dy = \frac{k}{\tan^2 \varphi(x)} \left(\frac{e_2^3(x) - e_1^3(x)}{3} + (h(x) + c(x)) \frac{e_2^2(x) - e_1^2(x)}{2} \right).$$

Druckverteilung: Numerische Berechnung

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} h \\ \psi \\ M \\ Q \\ \varphi \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi \\ \frac{M}{EI} \\ Q \\ -f \\ \frac{N}{GJ} \\ -m \end{pmatrix}, \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} M(x_T) \\ Q(x_T) \\ N(x_T) \\ M(x_S) \\ Q(x_S) \\ N(x_S) \end{pmatrix} = 0.$$

- Schießverfahren vom Bindungsmontagepunkt (= Skimitte) zu den beiden Skienden
- Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (dopri)
- Optimierung mittels gedämpftem Newton Verfahren (Deuflhard)
- Berechnung der Ableitungen für das Newton Verfahren mit Hilfe der Variationsgleichungen

Druckverteilung: Belastung und Schwungradius

Normalkraft und laterale Kraft auf Skifahrer

$$N = mg \cos \alpha, \quad L = \frac{mv^2}{r} - mg \sin \alpha \cos \beta.$$

Kantwinkel beim Carven im Gleichgewicht / Schwungradius

$$\tan \varphi = \frac{L}{N}, \quad r = R \cos \varphi.$$

Skiing Equation (Howe)

$$r^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) - 2r \frac{v^2}{g} \sin \alpha \cos \beta + \frac{v^4}{g^2} - R^2 \cos^2 \alpha = 0.$$

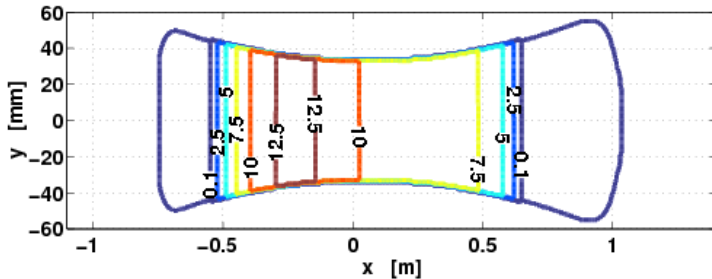
Druckverteilung: Iterationsprozess

- Geschwindigkeit v und Schwungposition β gegeben
- Bestimme aus Skiing Equation Schwungradius r (= Startwert)
- Setze $F_z = \sqrt{L^2 + N^2}$ und M_x so, dass $\tan \varphi = \frac{L}{N}$ gilt
- Löse Gleichungen für Biegung und Torsion des Ski im Schnee
- Krümmungsradius der Skikante gibt neuen Wert für Schwungradius
- Iteriere, bis sich Schwungradius nicht mehr ändert (Fixpunktiteration)

Druckverteilung: Ergebnis

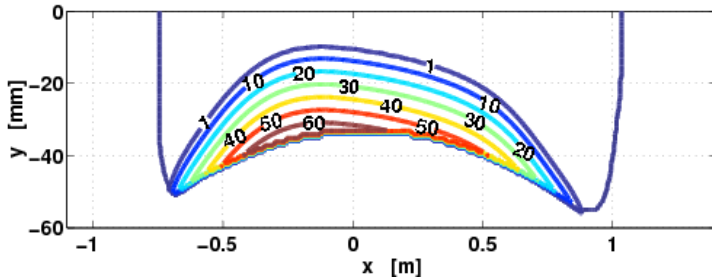
	v [m/s]	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 90^\circ$	$\beta = 135^\circ$
L [N]	9	332	740	1249
$F_z = T$ [N]	9	808	1045	1451
M_x [Nm]	9	24.80	33.86	47.23
r [m]	9	12.40	8.75	6.11
φ [°]	9	24.28	45.13	59.45
L [N]	10	667	1524	2229
$F_z = T$ [N]	10	1001	1692	2348
M_x [Nm]	10	32.35	54.96	75.52
[m]	10	9.22	5.24	3.92
φ [°]	10	42.58	64.16	71.68

Druckverteilung: Ergebnis



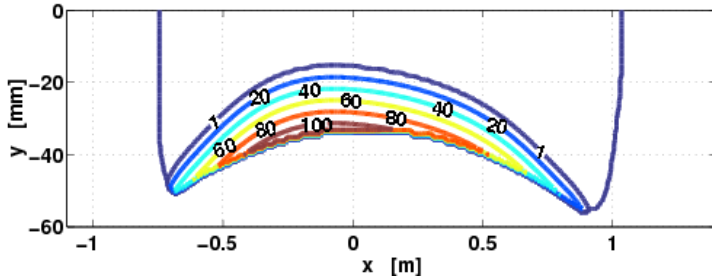
Druckverteilung in kPa beim Schussfahren

Druckverteilung: Ergebnis



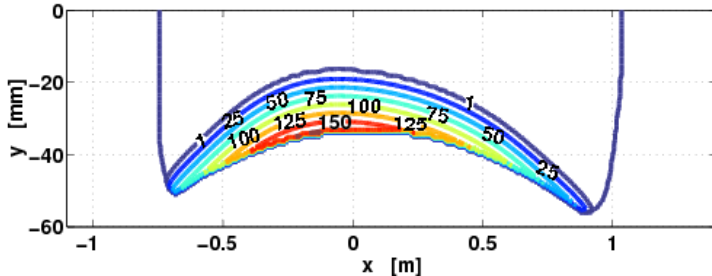
Druckverteilung in kPa beim Carven
Geschwindigkeit $v = 9$ m/s und Positionswinkel $\beta = 45$ Grad

Druckverteilung: Ergebnis



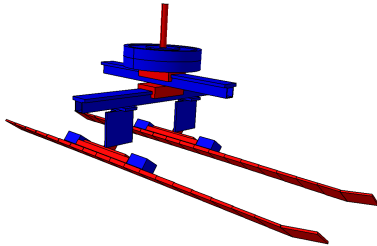
Druckverteilung in kPa beim Carven
Geschwindigkeit $v = 9$ m/s und Positionswinkel $\beta = 90$ Grad

Druckverteilung: Ergebnis



Druckverteilung in kPa beim Carven
Geschwindigkeit $v = 9$ m/s und Positionswinkel $\beta = 135$ Grad

Skischlitten: Modell

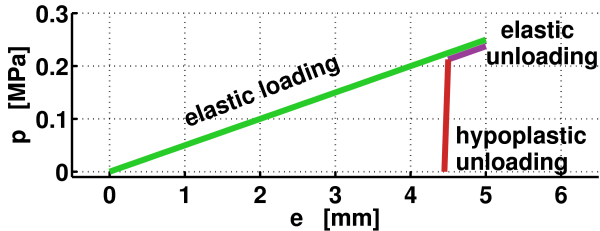


Skischlitten in LMS Virtual.Lab Software und Experiment
Realistische Modellierung von Ski, Bindung und Ski-Schnee
Kontakt

Abstract 7 und Vortrag bei ISEA

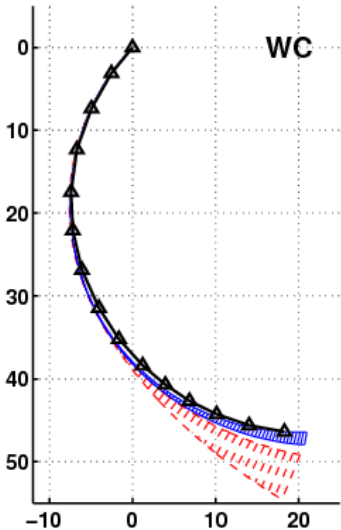
Skischlitten: Kräfte

- Eindringwiderstand normal zur Schneeoberfläche
Hypoplastisches Stoffgesetz



- Scherwiderstand lateral zur Bewegungsrichtung
- Luftwiderstand und Reibung tangential zur Bewegungsrichtung

Skischlitten: Ergebnis



Simulierte Fahrspur auf Grund
der gemessenen Schneeeigen-
schaften

Messwerte
Hypoplastisches Stoffgesetz
Elastisches Stoffgesetz

Zusammenarbeit

- **Peter Kaps**
Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften
- **Werner Nachbauer**
Institut für Sportwissenschaft

Unterstützung

- Fonds zur Förderung Wissenschaftlicher Forschung
- Institut für Sportwissenschaft
- Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften
- HTM Tyrolia
- Österreichischer Skiverband