Kurvenradius bei geschnittenen Schwüngen

Peter Kaps
Martin Mössner
Werner Nachbauer

Institut für Technische Mathematik,
Geometrie und Bauinformatik, Baufakultät
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck
Forschungsbericht

3-2000

Kurvenradius bei geschnittenen Schwüngen

Peter Kaps, Martin Mössner

Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik
Universität Innsbruck
Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck, Austria
email: kaps@mat1.uibk.ac.at, Martin.Moessner@uibk.ac.at

Werner Nachbauer

Institut für Sportwissenschaften
Universität Innsbruck
Fürstenweg 185, A-6020 Innsbruck, Austria
email: Werner.Nachbauer@uibk.ac.at

Februar 2000

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Ski als elastischer Balken modelliert. Biege- und Torsionssteifigkeit werden aus dem Aufbau des Ski berechnet oder durch Messung von Biegelinie und Verdrehung mit Hilfe der Differentialgleichungen für die Biegelinie und für die Verdrehung experimentell bestimmt. Dann wird die Eindringtiefe eines auf Schnee gebetteten Ski berechnet, auf den im Bindungsbereich eine zur Lauffläche normale Kraft, ein longitudinales und ein transversales Moment einwirken. Die eingedrungene Kante des Ski wird auf die als eben angenommene Schneeoberfläche projiziert und als Kreis approximiert. Der Radius dieses Kreises heißt Kurvenradius bei einem geschnittenen Schwung. Der Einfluß von Belastung, Biege-, Torsionssteifigkeit, Taillierung des Ski und Schneehärte auf den Kurvenradius wird systematisch untersucht.

AMS Mathematics Subject Classification: 73K

Stichworte: Ski, geschnittener Schwung, Kurvenradius, Biegesteifigkeit, Torsionssteifigkeit, Schneehärte.

Dank: Die Autoren bedanken sich beim Österreichischen Skiverband für die finanzielle Unterstützung.

Kurvenradius bei geschnittenen Schwüngen

Peter Kaps [1], Martin Mössner [1], Werner Nachbauer [2]

Universität Innsbruck
[1] Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik, Technikerstraße 13, A-6020 Innsbruck
[2] Institut für Sportwissenschaften, Fürstenweg 185, A-6020 Innsbruck

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß von Skitaillierung, von Biege- und Torsionssteifigkeit des Ski und von Schneeeigenschaften auf den Kurvenradius bei geschnittenen Schwüngen untersucht. Wir gehen nicht näher auf die Definition dieser Begriffe ein und verweisen auf die ausgezeichneten Bücher „Skiing Mechanics“ von Howe [Ho83] und Physics of Skiing von Lind und Sanders [LS97]. Darin sind geschnittene Schwünge audführlich behandelt. In der Arbeit Mössner et al. [Mö97] werden Meßergebnisse für Schwünge mit Carverski vorgestellt. Die von uns vorgestellten Ergebnisse sind ausführlicher in der Dissertation [Mö98] behandelt. Für gerutschte Schwünge gibt es Untersuchungen der Teams von Mote [LM85], [RM91], Hirano [HT94] und Hasegawa [HAM87], [HS93]. Eine weitere interessante Arbeit ist die Dissertation von Nordt [No99].

1. Stand der Forschung

Im Buch von Howe [Ho83] werden geschnittene Schwünge eingehend untersucht. Es wird gezeigt, daß der Kurvenradius eines geschnittenen Schwunges auf verdichtetem Schnee, wie er auf einer Skipiste auftritt, von geometrischen Eigenschaften des Ski (Länge und Taillierung), vom Kantwinkel und von der Eindringtiefe des Ski in den Schnee abhängt. Der Kantwinkel ist der spitze Winkel zwischen Schneeoberfläche und Lauffläche des Ski. Es ist wohlbekannt, daß der Ski durch Veränderung des Kantwinkels gesteuert werden kann. Die Eindringtiefe hängt ab von der Belastung des Ski, von mechanischen Eigenschaften des Ski wie Biege- und Torsionssteifigkeit und von mechanischen Eigenschaften des Schnee („Stoffgesetz“).

Wird der Schnee als starr angenommen, dringt der Ski überhaupt nicht in den Schnee ein. Dann gilt für den Kurvenradius R_s bei einem geschnittenen Schwung ([Ho85] p. 102)

$$R_s = \frac{l_k^{\,2}}{8\, d_k / \cos\vartheta} + \frac{1}{2}\, d_k / \cos\vartheta \,.$$

Der Index s bezieht sich auf starren Schnee. l_k bezeichnet die Länge des Ski (genauer: die Länge des Seitenformausschnittes), d_k die Taillierung des Ski (genauer: die Tiefe des Seitenformausschnittes, laut ÖNORM ist die Taillierung der Quotient Tiefe / Länge des Seitenformausschnittes) und ϑ den Kantwinkel. Bei der Herleitung dieser Formel wird angenommen, daß die Kurve, die durch den Kontakt von Schneeoberfläche und Skikante entsteht, ein Kreis ist. Der zweite Summand kann vernachlässigt werden, solange ϑ nicht in der Nähe von 90 Grad ist. So ist z.B. für einen stark taillierten Ski $d_k \approx 1{,}5$ cm. Mit diesem Wert ergibt sich für den zweiten

Summanden bei einem Kantwinkel von 85° ein Beitrag von 9 cm, bei 89° schon 43 cm. Daraus sieht man, daß bei den in der Praxis relevanten Kantwinkeln der zweite Term viel kleiner ist als der erste.

In Wirklichkeit ist der Schnee auch bei eisigen Verhältnissen nie ideal starr. Der Ski dringt in den Schnee ein. Wir illustrieren die Situation in Abb. 1.

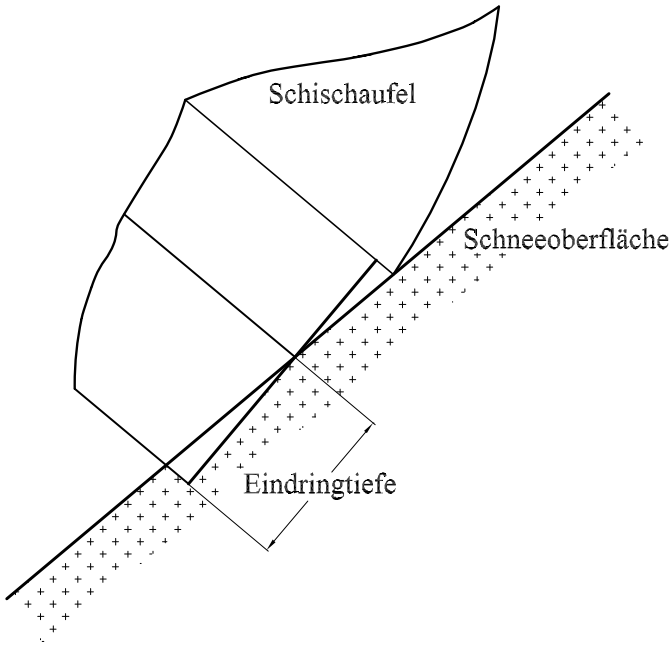

Abb. 1 Aufgekanteter Ski auf weichem Schnee

Wir nehmen an, daß sich Skischaufel (und Skiende) auf der Schneeoberfläche befinden, während der Ski in der Mitte durchgedrückt wird und dort um die Eindringtiefe d in den Schnee einsinkt. Die Eindringtiefe ist also die senkrecht zur Lauffläche des Ski gemessene Distanz von der in den Schnee eingedrungenen Skikante zur unverformten Schneeoberfläche und nicht – wie auch üblich – der Abstand Skikante zu Schneeoberfläche. Wir bezeichnen später auch die Skidicke mit d und hoffen, daß dies nicht zu Verwechslungen führt. Bei einer verformbaren Schneeoberfläche ergibt sich für den Kurvenradius

$$R = \frac{l_k^{\,2}}{8(d_k / \cos\vartheta + d \sin\vartheta)} .$$

In der Praxis werden auch Skischaufel und Skiende in den Schnee eindringen, jedoch nicht so stark wie die Skimitte. Die Eindringtiefe d gibt in diesem Fall an, um wieviel stärker der Ski in der Mitte eindringt als an Schaufel und Ende.

Wir diskutieren obige Beziehung für den Kurvenradius bei einer nicht starren Schneeunterlage im folgenden eingehend. Der Kurvenradius R ist eine Funktion von zwei Variablen, dem Kantwinkel und der Eindringtiefe. Die Eindringtiefe hängt – neben den weiter unten diskutierten Faktoren –

auch vom Kantwinkel ab. Ganz offensichtlich ist bei gleichen Schneeverhältnissen die Eindringtiefe bei einem nicht aufgekanteten Ski deutlich kleiner als bei einem aufgekanteten. Im ersten Fall wird die ganze Lauffläche des Ski belastet, im zweiten Fall hat nur ein geringer Teil der Lauffläche Kontakt zum Schnee.

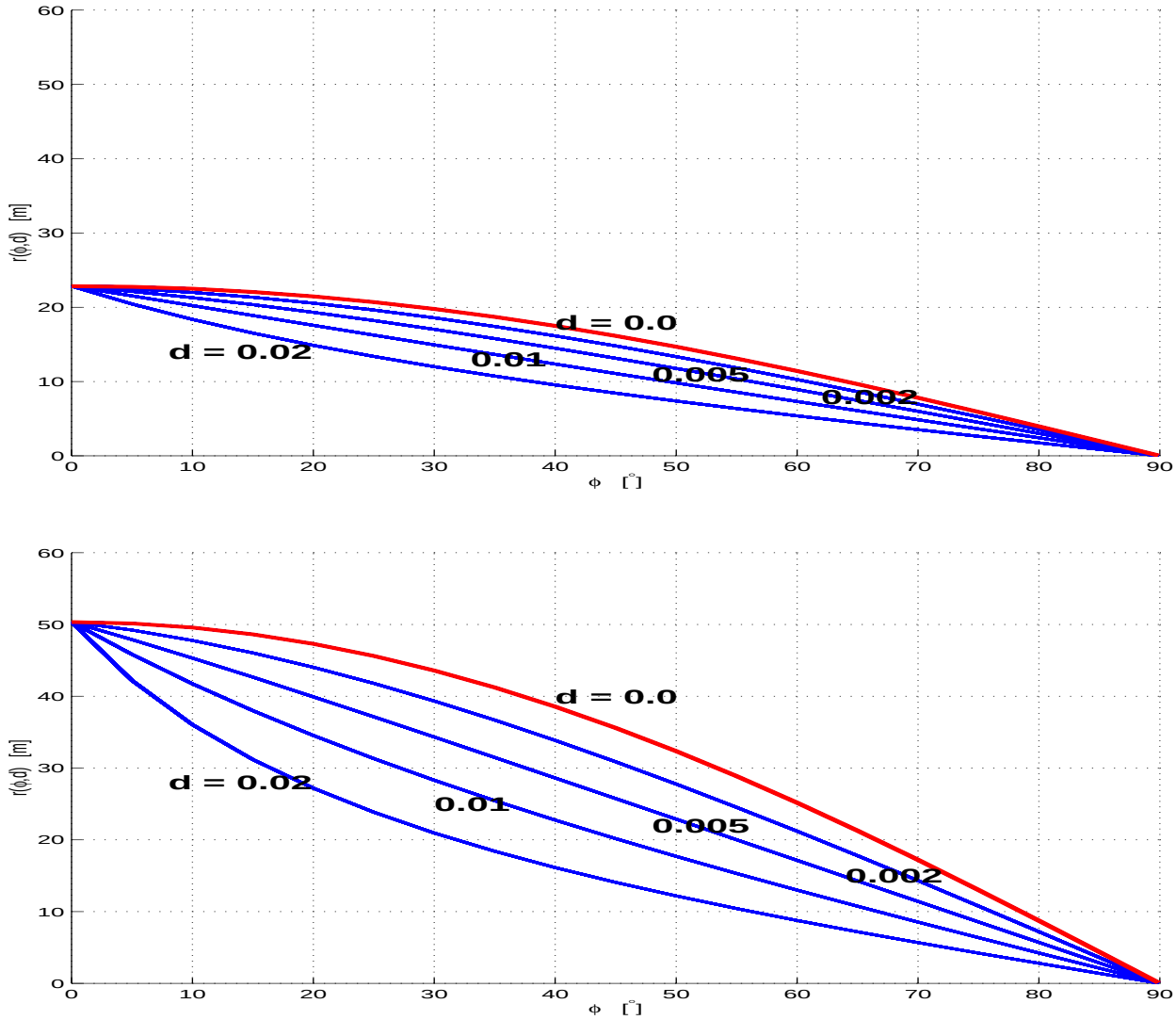

Abb. 2 Kurvenradius $R=r$ in Abhängigkeit von Kantwinkel $\phi = \vartheta$ und Eindringtiefe d
oberes Bild HEAD Cyber Race (stark taillierter Ski)
unteres Bild HEAD TR 16 DH (Abfahrtsski)

In Abb. 2 ist der Kurvenradius, der sich bei einer nicht starren Unterlage ergibt, als Funktion des Kantwinkels aufgetragen, und zwar im oberen Bild für einen stark taillierten Ski, einen Carving-Ski (HEAD Cyber Race, Skiradius r_s = 22,4 m, Tiefe des Seitenformausschnittes d_k = 15 mm) und im unteren Bild für einen wenig taillierten Ski, einen Abfahrtski (HEAD TR 16 DH, Skiradius r_s = 50,7 m, d_k = 9 mm). Die Eindringtiefe wird jeweils als Parameter aufgefaßt. Es

sind in jedem Bild fünf Kurven für verschiedene Eindringtiefen (nämlich 0.000, 0.002, 0.005, 0.010 und 0.020 m) angegeben. Es ist zu beachten, daß die Kurven nicht direkt die Abhängigkeit des Kurvenradius vom Kantwinkel wiedergeben. Ein Ski, der bei Kantwinkel von 10° eine Eindringtiefe von 2 mm aufweist, kann bei einem Kantwinkel von 40° durchaus eine Eindringtiefe von 1,5 cm aufweisen. Bei einem Kantwinkel von 0° ist der Kurvenradius gleich dem Skiradius, der durch die Taillierung festgelegt ist. Dieser Wert ist rein rechnerisch. In Wirklichkeit wird der Ski bei einem Kantwinkel von 0° geradeausfahren, da Innen- und Außenkante gleich belastet sind. Bei einem Kantwinkel von 40° verringert sich der Kurvenradius bei einer Eindringtiefe von 2 cm im Vergleich zu dem bei einer starren Unterlage (Eindringtiefe 0 cm) beim Carvingski um fast die Hälfte, beim Abfahrtski sogar um mehr als die Hälfte. Dieser Effekt ist beachtlich.

Durch Wahl des Kantwinkels kann der Skifahrer den Kurvenradius steuern. Wollte man bei hartem Schnee eine Kurve mit demselben Kurvenradius fahren wie bei weichem, wäre anstelle eines Kantwinkels von 40° ein Kantwinkel von 65° beim Carving-Ski bzw. 75° beim Abfahrtsski nötig. Kantwinkel über 70° dürften sich mit dem vorhandenen Ski- und Bindungsmaterial kaum realisieren lassen, da dann auch andere Teile wie etwa der Skischuh den Schnee streifen können.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß der Kurvenradius bei weichem Schnee unter Umständen deutlich kleiner als bei einer starren Schneeoberfläche sein kann. Maßgebend dafür sind die beiden Summanden im Nenner, die vom Kantwinkel, der Taillierung und der Eindringtiefe abhängen. Besonders bei einer kleinen Taillierung ($d_k \approx 9$ mm) wie bei einem Abfahrtsski kann der Term $d \sin\vartheta$ in der Größenordnung von $d_k / \cos\vartheta$ sein. Der Effekt kann also bei einem Abfahrtski ausgeprägter als bei einem Carvingski sein. Allerdings braucht die Eindringtiefe auch bei gleichem Schnee für verschiedene Ski nicht gleich sein. Abfahrtsski sind deutlich steifer als Carvingski. Bei steiferen Ski ist die Eindringtiefe kleiner ist als bei weicheren Ski. Zur Interpretation der Beziehung für den Kurvenradius sind daher quantitative Aussagen über die Einflußgrößen von fundamentaler Bedeutung.

Offensichtlich hängt der Kurvenradius nicht nur von den geometrischen Eigenschaften des verwendeten Ski (Länge und Taillierung), sondern auch von der Eindringtiefe ab. Diese hängt wiederum von den mechanischen Eigenschaften des Ski (Biege- und Torsionssteifigkeit), der Belastung (Gewicht und Fliehkraft) und den mechanischen Eigenschaften des Schnees ab. Es ist sinnvoll, den Einfluß dieser Größen getrennt zu untersuchen. Für Biege- und Torsionssteifigkeit könnte man im Prinzip relativ willkürliche Funktionen vorgeben. Um einigermaßen praxisrelevante Aussagen zu erhalten, haben wir diese beiden Größen für Ski mit laminarem Aufbau berechnet und für zwei verschiedene Ski die Rechnung mit einer Messung verglichen. Diese Untersuchungen wurden für einen Abfahrtsski (HEAD TR 16 DH) mit geringer Taillierung (Skiradius 50,9 m) und einen Carvingski (HEAD Cyber Race) mit starker Taillierung (Skiradius 22,4 m) durchgeführt. Es sei erwähnt, daß es schon Ski mit extrem starker Taillierung gibt (HEAD Cyber Space mit einem Skiradius von 14 m).

2. Berechnung von Biege- und Torsionssteifigkeit eines Ski aus Verbundwerkstoff

Wir berechnen die mechanischen Eigenschaften eines Ski aus geometrischen und mechanischen Daten über die Materialien, aus denen der Ski aufgebaut ist. Dazu wurde der Ski als Balken aus Verbundwerkstoff modelliert. Für nähere Informationen zu dieser Vorgangsweise sei auf die Lehrbücher [SGH95], [PW92] und die Arbeiten [CGT89], [DJV75], [Mö98] verwiesen. Historisch interessant sind auch die beiden Arbeiten [Vi39] für Holzschi.

Skiaufbau

Wir nehmen an, daß der unverformte Ski bezüglich einer Symmetrieebene, die parallel zur Längsachse ist und senkrecht auf die Lauffläche des Ski steht, symmetrisch aufgebaut ist. Die neutrale Faser befindet sich daher in dieser Ebene. Wir verwenden ein krummliniges rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Koordinaten (x,y,z) (siehe Abb. 3), wobei die x-Achse entlang der neutralen Faser, die y-Achse senkrecht zur Symmetrieebene und die z-Achse in der Symmetrieebene senkrecht zur neutralen Faser angeordnet ist. Den Ursprung des Koordinatensystems erhält man, wenn man den Mittelpunkt zwischen beiden Bindungsbacken senkrecht auf die neutrale Faser projiziert. Die positiven Vorzeichen der Koordinatenachsen werden folgendermaßen festgelegt: x nach vorne, y nach links, z nach oben. Im allgemeinen unterscheidet sich dieses Koordinatensystem kaum von einem rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystem, das man erhält, wenn man den anstelle des unverformten Ski den Ski so weit durchdrückt, daß die neutrale Faser eine Gerade wird. Wir unterscheiden deshalb auch in der Bezeichnung nicht zwischen diesen Koordinatensystemen.

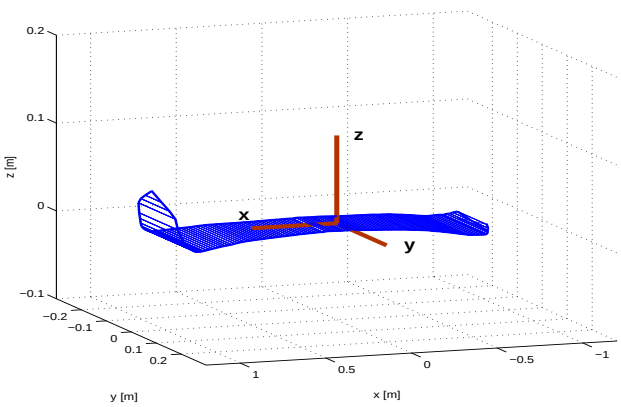

Abb. 3 Koordinatensystem

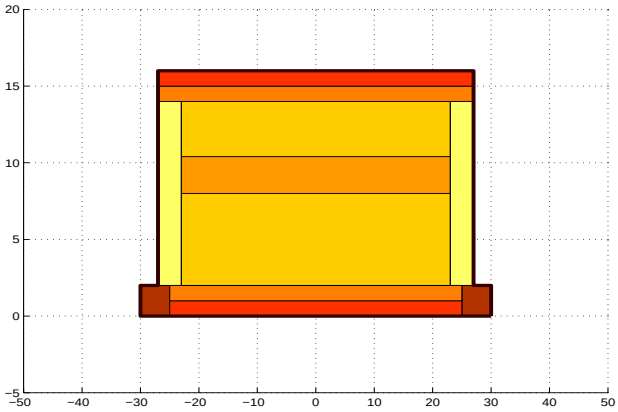

Abb. 4 Skiaufbau

Der innere Aufbau des Ski kann schematisch Abb. 4 entnommen werden. Es wird angenommen, daß der Elasitzitätsmodul E und die Poissonzahl ν der verschiedenen Materialien, die durch verschieden schattierte Rechtecke gekennzeichnet sind, konstant sind. Allfällige Anisotropien sind nicht berücksichtigt. Für genauere Details siehe [Mö98], [CGT89], [DT80]. Die Lage der neutralen Faser muß rechnerisch aus dem Skiaufbau ermittelt werden. Wir verwenden deshalb für Messungen ein Koordinatensystem, bei dem der Ursprung in derjenigen Ebene liegt, in der der unbelastete Ski aufliegt. Die Breite des Ski an der Stelle x wird mit $2\,w(x)$ bezeichnet, die Dicke

des Ski mit $d(x)$. In diesem Koordinatensystem bezeichnet $c(x)$ die z-Koordinate der Laufläche, $t(x)$ die der Skioberfläche und $z_n(x)$ die der neutralen Faser.

Abb. 5 zeigt die von uns untersuchten Ski HEAD Cyber Race und HEAD TR 16 DH in Grund- und Aufriß. Dabei bezeichnen $w(x)$ die Seitenform, $c(x)$ die Bogenhöhe, $t(x)$ die Skioberfläche und $z_n(x)$ die neutrale Faser. Man sieht, daß die neutrale Faser etwa in der Skimitte $(c+t)/2$ verläuft.

Biegesteifigkeit

Die (longitudinale) Biegesteifigkeit EI ist gegeben durch

$$EI(x) = \int E\, z^2\, dA.$$

Das Flächenintegral erstreckt sich über die Querschnittsfläche A an der Stelle x. Es kann leicht berechnet werden, wenn die Elastizitätsmoduln und Querschnitte der einzelnen Bestandteile bekannt sind. Für nähere Details verweisen wir auf [Mö98], [Hü91].

Die Biegelinie genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2h}{dx^2}\right) = q$$

wobei h die Auslenkung der neutralen Faser gegenüber der Ruhelage und q die Linienlast darstellt.

Torsionssteifigkeit

Bei der Torsion verdrehen sich die Querschnitte um den Verdrehwinkel φ. Dieser Winkel genügt der **Differentialgleichung für den Verdrehwinkel**

$$\frac{d}{dx}\left(GJ\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dx}\right) = -m\,.$$

Dabei bezeichnet GJ die Torsionssteifigkeit und m das Torsionsmoment pro Längeneinheit. Für kleine Verdrehwinkel gilt $\cos\varphi \approx 1$. Die bei der Torsion auftretende Elastizitätskonstante, der Schubmodul G, ergibt sich aus Elastizitätsmodul und Poissonzahl

$$G = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}\ .$$

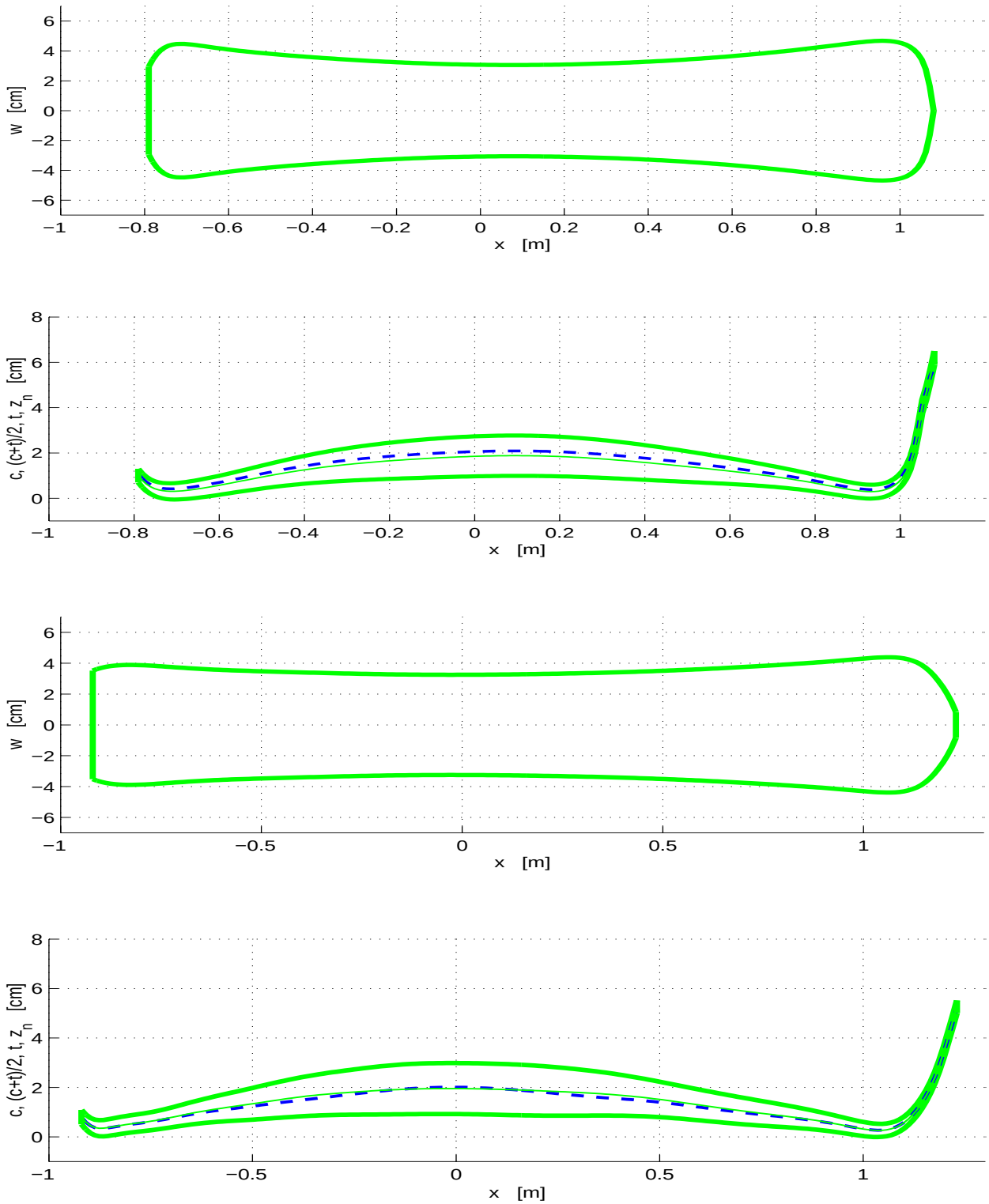

Abb. 5 Grund- und Aufriß des HEAD Cyber Race (oben) und des HEAD TR 16 DH (unten)

Wir bezeichnen mit G_i und A_i den Schubmodul und den Querschnitt des Materials mit dem Index i, weiters bezeichne $A(x)$ den Gesamtquerschnitt des Ski an der Stelle x. Damit erhält man den mittleren Schubmodul

$$G(x) = \frac{\sum G_i A_i(x)}{A(x)} .$$

Die Torsionssteifigkeit GJ wurde näherungsweise mit folgenden Formeln berechnet (siehe [DJV75]):

$$J(x) = \frac{2}{3} d(x)^3 w(x) \left(1 - \frac{92}{\pi^5} \frac{d(x)}{w(x)} \tanh \frac{\pi w(x)}{d(x)} \right)$$

$$GJ(x) = G(x) J(x) \ .$$

Exakt kann die Torsionssteifigkeit mit der Formel

$$GJ(x) = -4 \int G \, \Phi \, dA$$

berechnet werden. Das Integral erstreckt sich über den Skiquerschnitt an der Stelle x, Φ ist die Torsionsfunktion, welche sich als Lösung der Poissongleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 1$$

für den Skiquerschnitt an der Stelle x und homogenen Dirichlet'schen Randbedingungen ergibt [GHSW95]. Bei einem rechteckigen Querschnitt kann die Spannungsfunktion als Fourierreihe dargestellt werden. In der Formel für $J(x)$ werden wie in [DJV75] in die Formel für die Torsionssteifigkeit der mittlere Schubmodul und die ersten beiden Terme dieser Fourierreihe eingesetzt (siehe [Mö98]). Da der Schubmodul für die einzelnen Bestandteile stark unterschiedlich ist, ist diese Näherung unter Umständen bedenklich und kann zu Fehlern führen, die man nicht vernachlässigen sollte.

Konkret wurden zwei Ski untersucht, ein Abfahrtsski (HEAD TR 16DH) mit geringer Taillierung (Skiradius 50,9 m) und ein Carvingski (HEAD Cyber Race) mit starker Taillierung (Skiradius 22,4 m). Elastizitätsmoduln und Poissonzahlen der verwendeten Materialien wurden Tabellen ([CGT89], [DT80] und [Fo86], siehe [Mö98]) entnommen. Die Angaben weisen eine deutliche Variationsbreite auf. Weiters ist nicht sicher, wie genau die geometrischen Annahmen über den Skiaufbau zutreffen. Deshalb wurden mit der Dichte der Materialen auch Massen, Schwerpunkte und Trägheitsmomente dieser Ski bestimmt. Die Teilquerschnitte der einzelnen Materialen wurden so dimensioniert, daß die berechneten Werte mit den Meßwerten möglichst gut übereinstimmen. Weiters haben wir die Biegesteifigkeit und Torsionssteifigkeit für die beiden verwendeten Ski wie unten beschrieben experimentell bestimmt. Dann wurden Elastizitätsmodul und Poissonzahl der einzelnen Materialien innerhalb der Variationsbreite so bestimmt, daß die Abweichung zwischen Messung und Rechnung möglichst klein war.

3. Messung von Biegesteifigkeit und Torsionssteifigkeit

Biegesteifigkeit

Zur Messung der Biegesteifigkeit wird die Biegelinie gemessen und daraus aus der Differentialgleichung für die Biegelinie die Biegesteifigkeit errechnet. Zur Messung der Biegelinie wurden auf einer ebenen Tischplatte zwei Holzklötze mittels Zwingen festgeschraubt. Auf diese wurden weitere Holzklötze und der Ski gelegt. Sodann wurde der Ski mittels Gewichtscheiben mit etwa 45 kg im Bereich der Bindung belastet (Abb. 6).

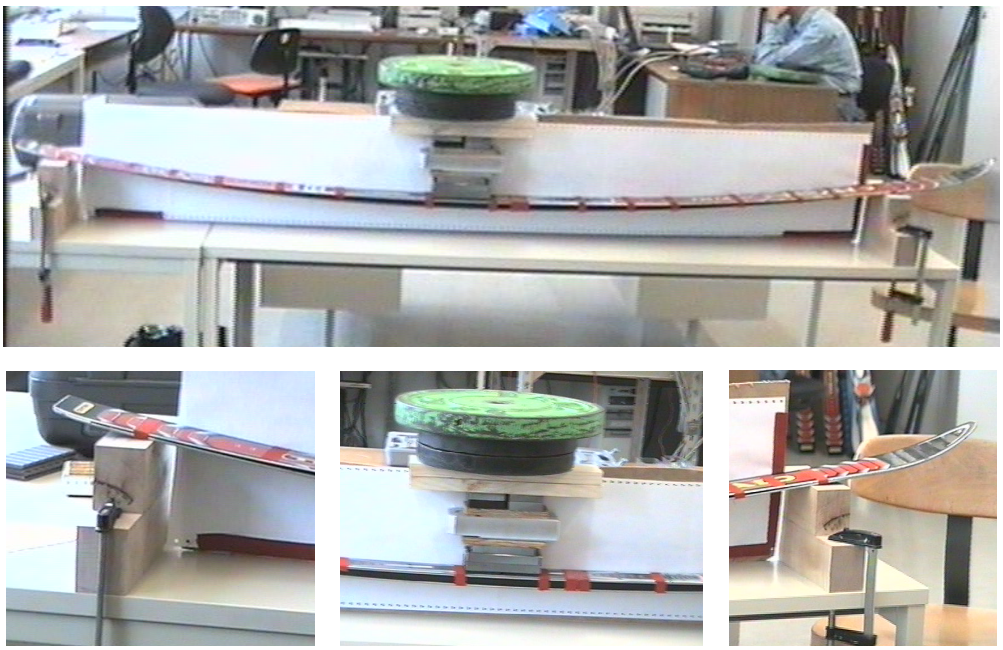

Abb. 6 Messung der Biegesteifigkeit

Durch die frei aufliegenden oberen Holzklötze wird erreicht, daß auf den Ski keine horizontale Kraft ausgeübt wird. Bei der Belastung des Ski verschieben sich die oberen Klötze in der Regel um ein paar Millimeter. Die relativ scharfen Ecken (Radius etwa 1mm) der Holzklötze geben einen klar definierten Auflagepunkt. Aufgrund der Rundung treten keine Störeffekte auf, wie dies bei messerscharfen Kanten der Fall wäre. Sodann wurde Endlospapier an einer dünnen biegbaren Faserplatte festgeklebt und durch Helfer vorsichtig an die Rückseite des Ski gedrückt. Es war dabei zu achten, daß die Faserplatte senkrecht steht und keinerlei Druck auf den Ski ausübt. Dann wurde mit einem dünnen Kugelschreiber die Kurve der hinteren Kante und die Positionen der Auflagerpunkte auf das Endlospapier übertragen. Analog dazu wurde auch eine Kurve für den unbelasteten Ski angefertigt. Diese entspricht bis auf eine additive Konstante der Bogenhöhe *c* des Ski.

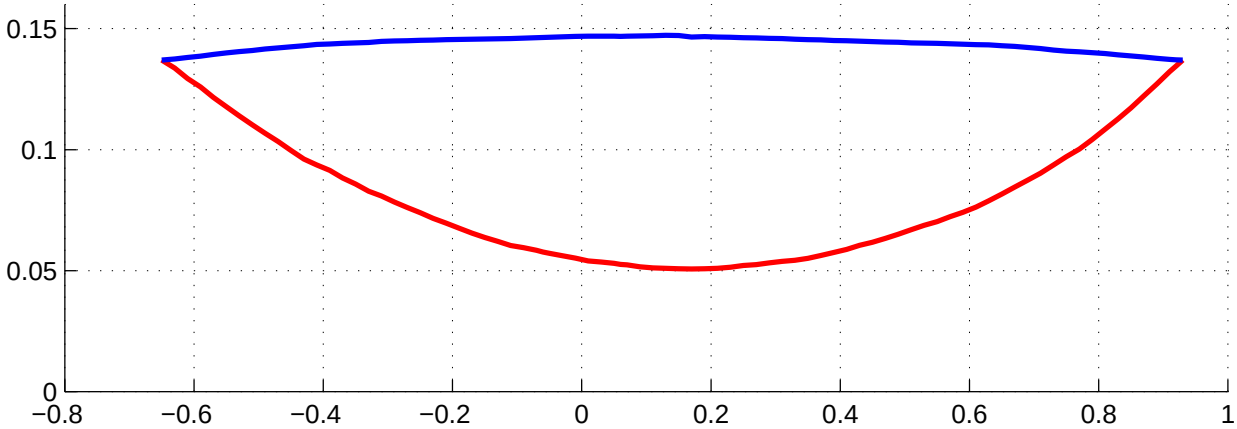

Abb. 7 Messung der Biegelinie – Verlauf des belasteten und unbelasteten Ski

In Abb. 7 ist das Meßergebnis schematisch dargestellt. Die obere Kurve stellt den Verlauf des unbelasteten Ski dar, die untere den des belasteten Ski. Zur Vermessung der Biegelinie wurde eine horizontale Gerade gezeichnet und mit einer Schublehre der Normalabstand der beiden Kurven zu dieser Geraden gemessen. Die Differenz zwischen diesen beiden Werten gibt die Verformung h des Ski unter Last, die sogenannte Biegelinie.

Bekanntlich genügt h der **Differentialgleichung für die Biegelinie**

$$M_y = -EIh'' ,$$

wobei EI die Biegesteifigkeit und M_y das Biegemoment darstellt. Das Biegemoment selber ergibt sich aus

$$M_y'' = -q ,$$

wobei q die aufgebrachte Linienlast ist. In unserem Fall ist

$$q(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } a < x < b, \\ \dfrac{F}{c-b}, & \text{für } b < x < c, \\ 0, & \text{für } c < x < d. \end{cases}$$

a und b sind die Koordinaten des Auflagers und b und c geben den Bereich an, in dem die Kraft F angreift. Daraus ergibt sich

$$M_y = \begin{cases} e\,(x-a) & \text{für } a < x < b \\ e\,(x-a) - \dfrac{F}{2(c-b)}(x-b)^2 & \text{für } b < x < c \\ e\,(x-a) - \dfrac{1}{2}F(c-b) - F(x-c) & \text{für } c < x < d \end{cases}$$

$$e = \frac{F}{d-a}\left(\frac{1}{2}(c-b) + d - c\right)$$

Last und Biegemoment sind für ein Beispiel in Abb. 8 angegeben.

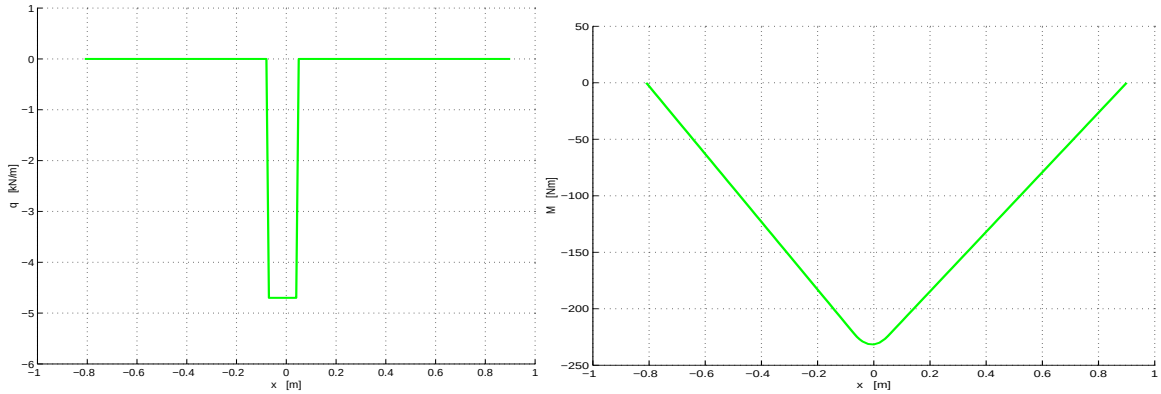

Abb. 8 Linienlast q und Biegemoment M_y zur Bestimmung der Biegesteifigkeit des Head TR 16 DH.

In einem nächsten Schritt muß h durch eine *glatte* Funktion dargestellt werden, die zweimal differenziert werden kann. Wegen der Meßfehler wären die Ergebnisse für die zweite Ableitung hoffnungslos falsch, wenn man die Daten nicht glättet. Es ist zu beachten, daß h'' aufgrund der Differentialgleichung für die Biegelinie $M_y = -EIh''$ bei den Auflagerpunkten verschwindet. Zur Datenglättung verwenden wir glättende Splines und geben die Randableitungen bis zur zweiten Ableitung vor (siehe [Mö98]). Durch Division mit h'' erhält man schließlich die Biegesteifigkeit.

In Abb. 9 sind für den HEAD Cyber Race (oben) und den HEAD TR 16 DH (unten) die Biegesteifigkeit EI aus Modell (durchgezogene Linie) und Messung (strichlierte Linie) bzw. die Durchbiegung h aus Modell (durchgezogene Linie) und Messung (Kreuze) dargestellt. Man sieht deutlich einen systematischen Fehler zwischen gemessener und errechneter Durchbiegung. Die Differenz kann 4 mm betragen, während die Meßgenauigkeit bei der Durchbiegung etwa 0.4 mm beträgt. Die Fehler zwischen berechneter Kurve und Meßdaten sind nicht normalverteilt und weisen in bestimmten Intervallen das gleiche Vorzeichen auf. Dies deutet darauf hin, daß die Modellannahmen, z.B. durch genauere Daten über den inneren Aufbau und genaue Messung von Elastizitätsmoduln und Poissonzahlen der verwendeten Materialien, verbessert werden könnten.

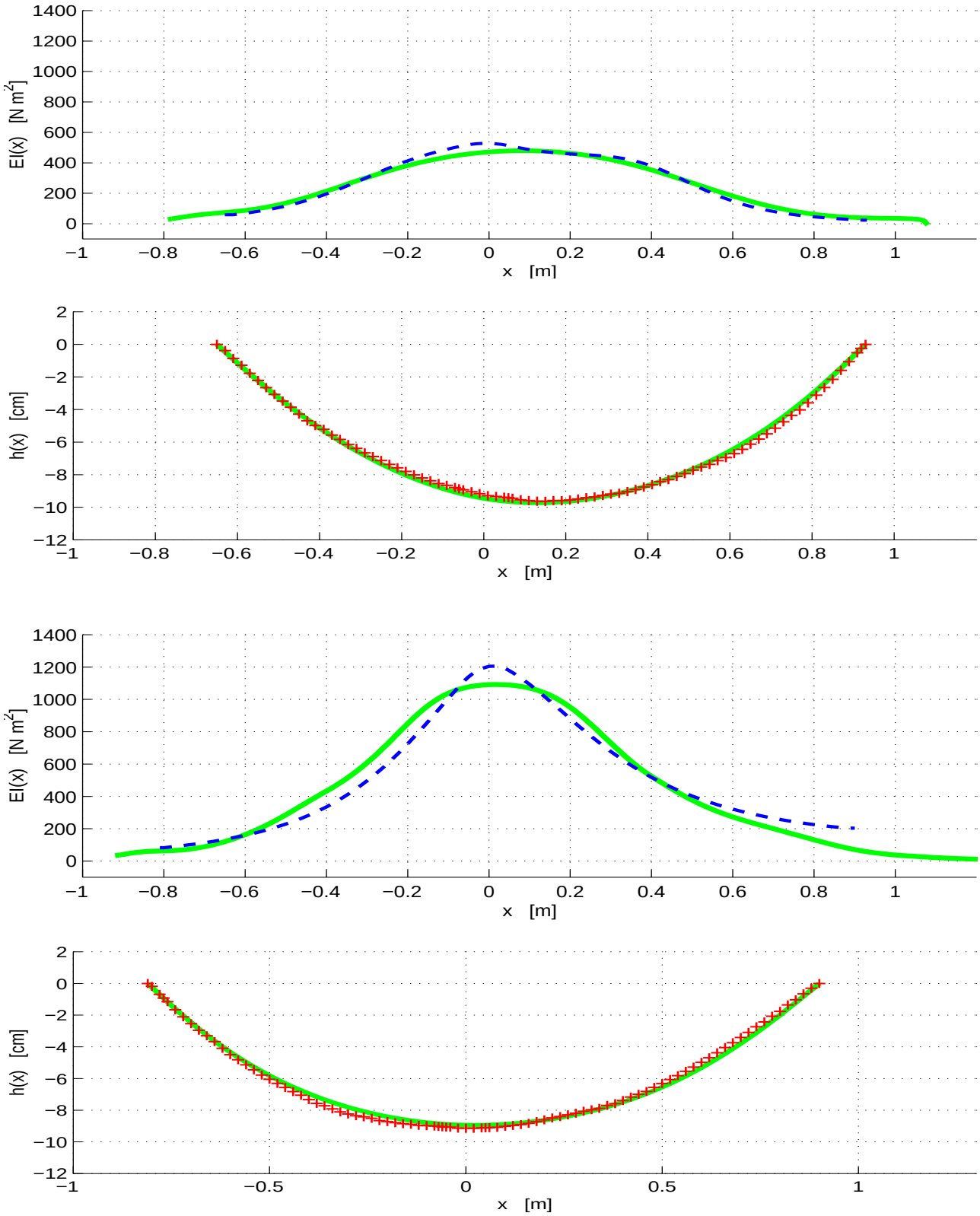

Abb. 9 Biegesteifigkeit *EI* und Durchbiegung *h*
für HEAD Cyber Race (oben) und des HEAD TR 16 DH (unten).

Torsionssteifigkeit

Bei der Messung der Torsionssteifigkeit des Ski geht man ähnlich vor wie bei der Messung der Biegesteifigkeit. Man mißt den Verdrehwinkel und berechnet daraus mit Hilfe der Differentialgleichung für die Verdrehung die Torsionssteifigkeit. Zur Messung des Verdrehwinkels (siehe Abb. 10) wird der Ski an seinen Enden mit Zwingen horizontal eingespannt. Es ist darauf zu achten, daß der Ski auch unter Last bei den Lagern kein Spiel hat. Während der Messung treten im Bereich der Lager beträchtliche Kräfte auf. Schon ein geringes Nachgeben der Lager würde dazu führen, daß die Randbedingungen um einige Grade verletzt werden. Sodann wird in der Skimitte ein Torsionsmoment aufgebracht, welches den Ski verdreht. Man wählt dazu eine Last und einen Lastarm so, daß der Ski in der Mitte ca. 10 – 15° verdreht wird. Der verdrehte Ski wird auf eine senkrechten Schirm projiziert. Dann wird die Last so positioniert, daß kein Moment wirksam ist und dieselbe Prozedur wiederholt. Aus dem Abstand der neutralen Faser zum Schirm

Abb. 10 Messung der Torsionssteifigkeit

und beiden Markierungen am Schirm kann der Verdrehwinkel berechnet werden. Der Verdrehwinkelverlauf wird geglättet und einmal differenziert. Die Torsionssteifigkeit ergibt sich aus

$$M = GJ\ \varphi' ,$$

da ja das Torsionsmoment M bekannt ist.

In Abb. 11 sind Torsionssteifigkeit und Verdrehwinkel beim HEAD TR 16 DH geplottet. Das obere Bild zeigt die nach dem Modell berechnete Torsionssteifigkeit (durchgezogene Linie) und die auf Grund der Messung ermittelte Torsionssteifigkeit (strichlierte Linie). Im unteren Bild sind die Meßwerte für die Verdrehung (Kreuze) und der mit unserem Modell berechnete Verdrehwinkelverlauf (durchgezogene Linie) angegeben. Die Unterschiede zwischen dem berechneten und gemessenen Verlauf der Torsionssteifigkeit dürften davon herrühren, daß die Fehler in der Messung der Verdrehung relativ groß sind.

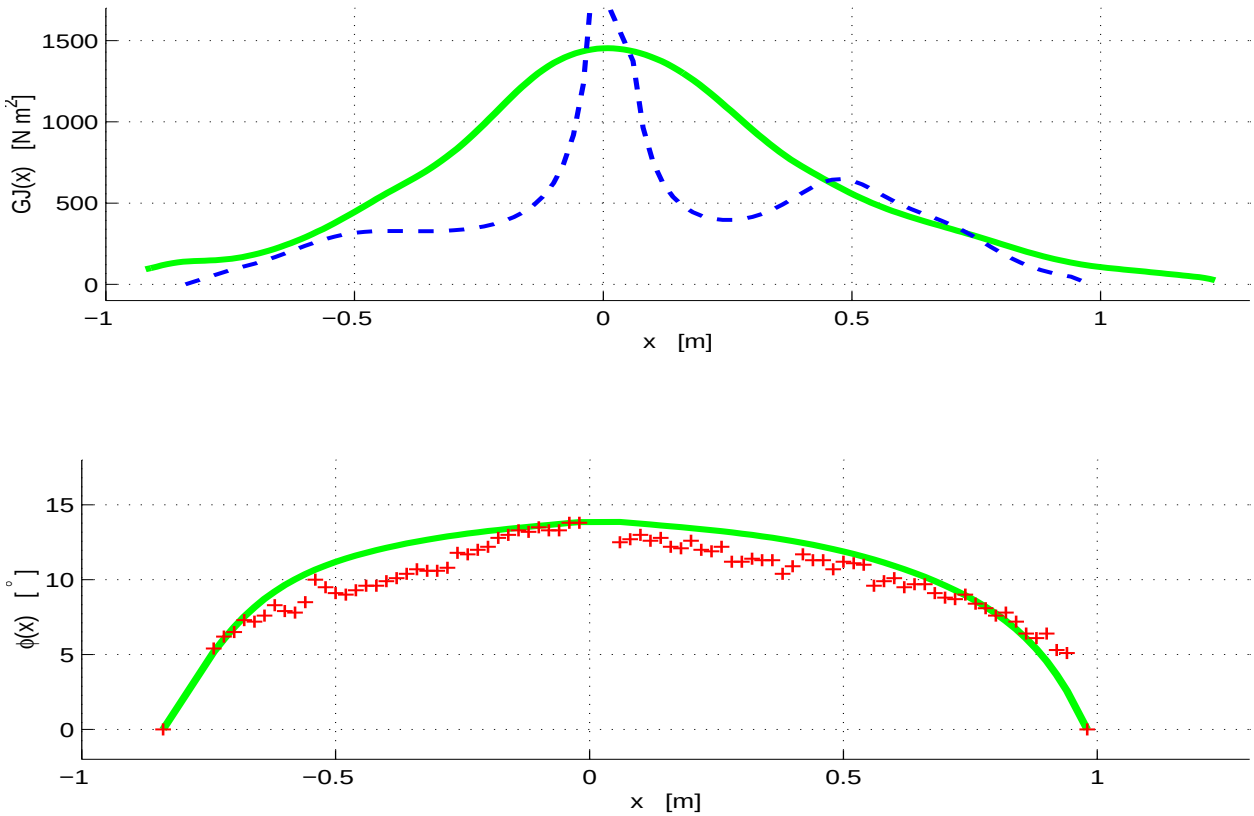

Abb. 11 Torsionssteifigkeit (oben) und Verdrehwinkel (unten) beim HEAD TR 16 DH
Berechnung aus Modell (durchgezogene Linie) und Messung (strichlierte Linie bzw. Kreuze)

4. Schneemodell

Obwohl es zahlreiche Arbeiten über mechanischen Eigenschaften des Schnees gibt (siehe z.B. den Übersichtsartikel [SJSB97]), gibt es kaum Untersuchungen über verfestigten Schnee in einem für Schifahren interessanten Belastungsbereich. In der Dissertation von Aichner [Ai78] wird der Schnee bei Druck als linear elastisch angenommen, bei Zug übt der Schnee keine Kraft aus. Wir sind davon ausgegangen, daß bei Belastung eine Kraft normal zur Lauffläche des Ski wirkt. Diese Kraft wurde im Normalfall als linear angenommen.

Unsere Grundannahme ist, daß ein nicht aufgekantetes, starres, rechteckiges Brett der Länge L und Breite B unter einer Last F im Schnee um die Eindringtiefe d einsinkt. Daraus wird eine Konstante k wie folgt berechnet:

$$k = \frac{F}{LBd^{\alpha}} .$$

Dann übt der Schnee beim aufgekanteten Ski auf ein Flächenelement, das mit der Eindringtiefe d in den Schnee eindringt, den Druck

$$p = kd^{\alpha}$$

aus. Durch verschiedene Wahl der Parameter k und α werden verschiedene Schneearten und verschiedene Schneehärten beschrieben. Wir nennen k Parameter für die Schneehärte. Im Normalfall wurde der Exponent $\alpha = 1$ verwendet. Es wurden auch Testrechnungen mit einem nichtlinearen Verlauf für $0{,}4 \le \alpha \le 2$ durchgeführt. Es zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit vom Exponenten. Eine Zuordnung dieser Parameter zu einer bestimmten Schneeart auf der Piste ist derzeit nicht möglich. Eine Meßanordnung dafür muß erst entwickelt werden.

Ist die Belastung zu groß, kommt es zu einem Abscheren des Schnee. Experimentell wurde dieses Verhalten von [LM84] für Eis untersucht. Für Schnee wurden Kräfte angenommen, die um den Faktor 0,02 kleiner als bei Eis waren ([LM85]). Da keine experimentellen Untersuchungen vorliegen, wann dieses Abscheren bei Schnee auftritt, wurde das Abscheren von uns nicht berücksichtigt, obwohl wir im Prinzip einen Einfluß auf den Kurvenradius durchaus für möglich halten.

5. Verformung des Ski

Der in den Schnee gebettete Ski wird durch das nichtlineare Randwertproblem

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI(x)\frac{d^2h}{dx^2}\right) = f(x, h(x), \varphi(x), F_z, M_y)$$

$$\frac{d}{dx}\left(GJ(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) = -m(x, h(x), \varphi(x), M_x)$$

$$h''(x_t) = h'''(x_t) = \varphi'(x_t) = 0, \quad h''(x_x) = h'''(x_x) = \varphi'(x_s) = 0$$

beschrieben. Die Linienlast f und das Torsionsmoment m pro Längeneinheit werden aus der Druckverteilung unter dem Ski und der Belastung des Ski durch den Skifahrer berechnet. Die Belastung durch den Skifahrer wird durch Angabe von F_z, M_x, M_y festgelegt. Weiters hängen f und m auch bei $\alpha = 1$ nichtlinear von $h(x)$ und $\varphi(x)$ ab. φ. Wir zerlegen das Randwertproblem in zwei Anfangswertprobleme: an der Stelle x=0 werden jeweils die gleichen Anfangswerte für die Biegelinie $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, $h'''(0)$ und den Kantwinkel $\varphi(0)$ und $\varphi'(0)$ als Startwerte vorgegeben. Somit wird eine dreimal stetig differenzierbare Biegelinie und ein einmal stetig differenzierbarer Kantwinkel erreicht. Mit diesen Anfangswerten werden die Randbedingungen $h''(x_s)$, $h'''(x_s)$, $\varphi'(x_s)$ sowie $h''(x_t)$, $h'''(x_t)$, $\varphi(x_t)$ berechnet. Für die zunächst unbekannten Anfangswerte werden Startwerte vorgegeben und iterativ so lange verändert, bis das Randwertproblem erfüllt ist. Es erweist sich dabei als zweckmäßig, ein Newtonverfahren zu verwenden und die Ableitungen nach den unbekannten Anfangswerten aus den Variationsgleichungen zu berechnen (siehe [HNW93], [Mö98]).

6. Berechnung des Kurvenradius

Bekanntlich übt ein Skifahrer beim Kurvenfahren auf die Ski im Bindungsbereich Kräfte und Momente aus. Wir gehen nicht detailliert darauf ein, wie diese Kräfte und Momente erzeugt werden. Es sei nur darauf hingewiesen, daß der Skifahrer nur im Bindungsbereich Kräfte und Momente auf den Ski übertragen kann und daß durch die Vorgabe dieser Kräfte die Fahrlinie (insbesondere auch der momentane Kurvenradius) und die Art des Schwunges (geschnitten oder gerutscht) festgelegt werden.

Eine Untersuchung des zeitlichen Verlaufes von Schwüngen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Einerseits stehen – zumindest für die von uns untersuchten Ski – keine Daten über den zeitlichen Verlauf von Kräften und Momenten im Verlauf eines Schwunges zur Verfügung, andererseits müßte die Bewegungsgleichung gelöst werden. Wir wählen deshalb eine quasistatische Vorgangsweise. Dabei werden die beim dynamischen Vorgang auftretenden Trägheitskräfte wie z.B. die Fliehkraft bei einer statischen Rechnung berücksichtigt. Wir geben in einer bestimmten Phase des Schwunges Kraft und Moment vor. Mit der Geometrie des Ski (Breite, Taillierung, Vorspannhöhe), seinen elastischen Eigenschaften (Biege- und Torsionssteifigkeit) und einem Kraft-Verformungsgesetz für den Schnee wird daraus die Verformung der Kontaktfläche zwischen Ski und Schnee berechnet. Wir projizieren die Lage der Skikante auf die Schneeoberfläche und legen durch diese Kurve nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate einen Ausgleichskreis und bestimmen dessen Radius. Der Radius dieses Kreises wird als Approximation für den Radius des Krümmungskreises der Kurve an der untersuchten Stelle verwendet (siehe [Mö98]).

7. Ergebnisse

Wie wir gesehen haben, hängt der Schwungradius von vielen Faktoren ab. Einer dieser Faktoren ist der Kantwinkel. Andere Faktoren sind Skiradius, Schneehärte, Belastung im Bindungsbereich (genauer Kraft F normal auf Ski und die Momente M_x und M_y um die Längs- bzw. die Querachse des Ski), Biegesteifigkeit und Torsionssteifigkeit. Zur grafischen Veranschaulichung geben wir den Schwungradius als Funktion des Kantwinkels an und geben den Einfluß eines bestimmten Faktors dadurch an, daß wir diesen Faktor als Parameter auffassen und Kurven für verschiedene Werte dieses Parameters zeichnen, und die anderen Einflußfaktoren als fest vorgegeben annehmen. Die Werte der Einflußfaktoren in der Standardsituation werden im folgenden behandelt. Die entsprechenden Plots finden sich im Anhang.

Standardsituation

Parameter für Schneehärte: Als Maß für die Schneehärte nehmen wir an, daß ein starres, rechteckiges Brett mit der Länge L=1,5 m und der Breite B=0,1 m, das mit einer Kraft F=1000 N belastet wird, d=0.5 mm tief einsinkt. Weiters nehmen wir einen linearen Verlauf zwischen Eindringtiefe und Druck an: α =1. Daraus ergibt sich für den Parameter für die Schneehärte ein Wert von k=1,3 10^7 N/m³.

Normalkraft auf Ski: F_z = - 2205 N. Beim Durchfahren eines kreisförmigen Bogens wirkt auf den belasteten Ski eine resultierende Kraft, die sich aus Gewicht und Fliehkraft zusammensetzt. F_z ist die Komponente dieser Kraft, die normal auf die Lauffläche unter der Skibindung wirkt. Der verwendete Wert entspricht etwa einer Kraft, die beim Durchfahren einer Kurve mit einem Radius von 40 m und einer Geschwindigkeit von 30 m/s = 108 km/h auftritt.

Moment um Querachse des Ski: Wir nehmen eine neutrale Stellung des Skifahrers an, das heißt, der Skifahrer hat weder Vor- noch Rücklage: M_y = 0 Nm.

Moment um Längsachse des Ski: Die Rechnung erfolgt jeweils für vorgegebene Momente M_x = 2, 4, 6, ... Nm. Der zu den einzelnen Momenten berechnete Kantwinkel $\vartheta = \varphi(0)$, der gleich dem Wert des Verdrehwinkels an der Stelle x = 0 ist, wird mit den Ergebnissen gespeichert. Die Momente werden in Schritten von 2 solange gesteigert, bis ein Kantwinkel $\varphi(0)$ von 80° erreicht wird oder das Verfahren nicht mehr konvergiert. Diese Vorgangsweise dient zur Variation des Kantwinkels. Der zum jeweiligen Moment gehörige Kantwinkel wird als unabhängige Variable in das Diagramm eingetragen.

Biege- und Torsionssteifigkeit: werden nach dem Modell aus dem Skiaufbau bestimmt und sind in etwa gleich groß wie die Meßwerte. Es wurden die Werte für den Abfahrtsski HEAD TR 16 DH (siehe Abb. 9 und Abb. 11) verwendet.

Skiradius: Es wurde der Wert für den Abfahrtsski HEAD TR 16 DH verwendet: r_s =50,7 m.

In allen Diagrammen entsprechen fette Kurven dem Standardski, die fette obere Kurve entspricht einer starren Schneeunterlage, die fette untere Kurve der Schneehärte in der Standardsituation. In den folgenden Diagrammen werden die einzelnen Einflußgrößen variiert.

Schneeart und Schneehärte

Den Einfluß von Schneeart und Schneehärte wird durch zwei Größen charakterisiert: die Eindringtiefe d des starren Brettes und den Exponenten α in der Formel für das Schneemodell. In Abb. 12 (Anhang) wird für α = 1 die Eindringtiefe d variiert: d = 0.00001 m entspricht sehr hartem Schnee, d = 0.01 m entspricht weichem Schnee. Die oberste fette Kurve gibt den Verlauf

des Kurvenradius als Funktion des Kantwinkels bei einer starren Unterlage an. Die unterste Kurve entspricht weichem Schnee d = 1 cm, die nächste d = 5 mm, die dritte, fette Kurve d = 2 mm, die weiteren Kurven entsprechen d = 1 mm, d = 0.5mm, d = 0.2 mm, d = 0.1 mm und d = 0.01 mm. Die oberste, fette Kurve entspricht starrem Schnee, das heißt d = 0 mm. In Abhängigkeit von d wird der Parameter für die Schneehärte k aus der Formel $F = LBkd^{\alpha}$ bestimmt, wobei für die Länge und Breite des starren Brettes L = 1.5, B = 0.1 m und für die Normalkraft F = 1000 N gesetzt wurden. Für den Exponenten wurde α = 1 gewählt. Als Belastung des Skis wurden eine Kraft $F_z = -2205$ N und Momente $M_y = 0$ Nm bzw. $M_x = 2.4$ Nm angenommen. Skiradius, Biege- und Torsionssteifigkeit entsprachen dem untersuchten Ski HEAD TR 16 DH. Man sieht deutlich, daß sich der Kurvenradius bei weichem Schnee schon bei geringen Kantwinkeln stark verringern kann.

Als zweiten Parameter wird der Exponent α in der Formel $F = LBkd^{\alpha}$ variiert und d = 0.5 mm gesetzt (siehe Anhang Abb. 13). Die Wahl α = 1 entspricht dem vorher untersuchten linearen Verlauf. Wir variieren den Exponenten von α = 0.40 bis α = 2.49 durch die Wahl $\alpha = 1{,}2^{j}$, j = *-5, -4, ..., 5*. Man sieht, daß die Ergebnisse stark von der Wahl des Exponenten abhängen. Da der Exponent nicht bekannt ist, wären experimentelle Untersuchungen sinnvoll. Insbesondere sollte auch die Frage geklärt werden, ob der Exponent je nach Schneeart verschieden sein kann.

Belastung

Für die oben definierten Standardwerte wurde die Normalkraft, die auf den Schi wirkt, von $F_z = -1600$ N bis $F_z = -2600$ N variiert (siehe Anhang Abb. 14). Die unterste Kurve entspricht der maximalen Belastung. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Lastfällen sind relativ gering, die Abweichung zum Fall einer starren Schneeunterlage (obere, fette Kurve) sind beachtlich. Sie rühren hauptsächlich von der Schneehärte her, der Parameter k für die Schneehärte entspricht einem Eindringen des starren Brettes um d=0.5mm.

Vorlage oder Rücklage

Um den Einfluß von Vor- oder Rücklage zu untersuchen, wurde das Moment um die Querachse M_y von -60 Nm bis 60 Nm in Schritten von 20 Nm variiert (siehe Anhang Abb. 15). Bei Vorlage des Skiläufers ist das Moment positiv, bei Rücklage negativ. Der Schwungradius ist praktisch unabhängig von Vor- oder Rücklage, und ist durch die Schneehärte festgelegt. Die obere fette Kurve entspricht einer starren Schneeunterlage.

Abhängigkeit von Verlauf der Biegesteifigkeit EI

Zur Bestimmung des Einflusses der Biegesteifigkeit wurde die für den Abfahrtsski HEAD TR 16 DH aus dem Skiaufbau berechnete Biegesteifigkeit mit Faktoren von $1{,}5^{j}$, j = *-5, -4, ..., 5* multipliziert. Die resultierenden Biegesteifigkeiten sind im Anhang Abb. 17 dargestellt, Abb. 16 zeigt die entsprechenden Kurvenradien. Bei den steiferen Ski (obere Kurven) und größeren Kantwinkeln werden die Kurvenradien kleiner als bei starrem Schnee. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, daß der Ski bei diesen Kantwinkeln bei Spitze und Ende stärker in den Schnee eindringt als in der Skimitte. Wie erwartet, ist bei weicheren Ski der Schwungradius am kleinsten.

Störungen an Skiende bzw. Skischaufel

Weiters wurde der Einfluß von vergleichsweise geringen Änderungen der Biegesteifigkeit im Bereich der Skischaufel bzw. des Skiendes untersucht. Es zeigt sich, daß schon geringe Änderungen einen beachtlichen Einfluß auf den Kurvenradius besitzen.

Abhängigkeit von Torsionssteifigkeit GJ
Obwohl die Torsionssteifigkeit in einem relativ großen Bereich geändert wurde, zeigte sich, daß der Kurvenradius praktisch nicht von der Torsionssteifigkeit abhängt. Dieses Ergebnis ist überraschend und steht im Widerspruch zu Aussagen von Rennläufern und Skidesignern.

Abhängigkeit vom Skiradius
In letzten Abbildung ist der Abhängigkeit des Kurvenradius vom Skiradius angegeben. Die Kurven geben die Schwungradien für Ski in Abhängigkeit von der Taillierung an (siehe Anhang Abb. 18). Dabei wurde die Breite des Ski wie beim Abfahrtsski HEAD TR 16 DH gewählt und die Breite an Skiende und Skischaufel so gewählt, daß sich ein vorgegebener Skiradius ergibt. Der jeweils vorgegebene Skiradius ist bei einem Kantwinkel von 0° abzulesen. Die durchgezogenen Kurven entsprechen den Schwungradien bei einer starren Schneeunterlage. Biege- und Torsionssteifigkeit wurden aus dem Skiaufbau berechnet, indem die Skihöhe gleich wie beim HEAD TR 16DH angenommen wurde, die Taillierung wurde dadurch erreicht, daß die Schaufel und Skiende bei konstanter Breite in der Skimitte so verbreitert wurden, daß die gewünschten Skiradien von 20 bis 70 m entstanden. Trotzdem sind stark taillierte Ski an den Enden nur geringfügig steifer als Ski mit großem Skiradius. Man sieht deutlich, daß bei kleiner Taillierung bzw. großen Kurvenradien der Einfluß des Einsinkens deutlich größer ist als bei stark taillierten Ski. Bei Kantwinkeln ab 20° ist der aktuelle Kurvenradius beim Ski mit der stärksten Taillierung am kleinsten.

8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluß verschiedener Faktoren auf den Schwungradius von Ski untersucht. Auf einer starren Schneeunterlage hängt der Schwungradius nur von geometrischen Eigenschaften des Ski (Skilänge und Tiefe des Seitenformausschnitts) ab und dem Kantwinkel ab. Nimmt man den Verlauf des Kurvenradius, der sich bei einer starren Schneeunterlage aus dieser Formel errechnet, als Referenz her, zeigt sich, daß der tatsächliche Kurvenradius bei einer zwar harten, aber nicht starren Schneeunterlage deutlich kleiner (weniger als 50%!) sein kann. Diese Verringerung hängt stark von der Schneehärte und dem Stoffgesetz für den Schnee ab, der Einfluß von Änderungen der Biegesteifigkeit, insbesondere an Schaufel und Skiende ist ebenfalls beachtlich. Änderungen der Torsionssteifigkeit zeigen überraschenderweise keinen Einfluß. Der Einfluß der Normalkraft ist relativ gering, das heißt, der Kurvenradius hängt kaum von der Geschwindigkeit ab, mit der die Kurve durchfahren wird. Es sei betont, daß die auf den Skifahrer wirkenden Kräfte mit wachsender Kurvengeschwindigkeit und kleinerem Kurvenradius steigen. Weiters hängt der Kurvenradius praktisch nicht von Vor- oder Rücklage des Skiläufers ab.
Die geometrischen Eigenschaften des Ski können leicht gemessen werden. Eine Messung der Biegesteifigkeit ist aufwendig, insbesondere, weil dafür die in der ÖNORM S 4022 verankerte Messung der Auslenkung bei Belastungen an Skispitze, –mitte und –ende nicht ausreichend sein dürfte. Eine experimentelle Bestimmung der Schneehärte ist praktisch nur an wenigen Stellen der Piste durchführbar. Auf Grund von Sonneneinstrahlung, Temperaturschwankungen, Wind, Änderungen im Feuchtigkeitsgehalt, u.s.w. kann es zudem zu raschen zeitlichen Änderungen der Schneehärte an ein und derselben Stelle kommen.

9. Literatur

[Ai78] Aichner, N.: Bodendruckverteilung und Formänderungswiderstand beim gleitenden Ski. Dissertation an der TU Graz, 1978

[CGT89] Clerc, C., Gaertner, R., Trompette, P.: Computer Aided Design of Skis, Finite Elements in Analysis and Design 5, p. 1-14, 1989

[DJV75] Deak, A., Jorgensen J., Vagners J.: The engineering characteristics of snow skis. Part 1: Static bending and torsional characteristics. Journal of Engineering for Industry, Vol 97 , p. 131-137, 1975

[DT80] Deveaux, P., Trompette, P.: Letter to the editor: Modal analysis of a ski by the finite element method, Shock Vib. Bull. 73, 597-600, 1980

[Fo86] Fogiel, M.: Handbook of mathematical, scientific and engineering formulas, tables, graphs, transforms. Research and Education Association, New York 1986

[GHSW95] Gross, D., Hauger, H., Schnell, W., Wriggers, P.: Technische Mechanik, Band 4, Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden, Springer, Berlin, 2. Auflage, 1995

[HAM87] Hasegawa, K., Asaoka, A., Miyazaki, T.: A Dynamical Simulation Model of Skiing Turn, Monoski Model, Memoirs of the Faculty of Engineering, Fukui University, Vol 35, N. 1, pp. 133-150, 1987

[HNW93] Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G.: Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems. Second Revised Edition, Springer, Berlin 1993

[HS93] Hasegawa, K., Simizu, S.: Dynamics and Computer Simulation of Skiing Turn, 1993

[HT94] Hirano Y., Tada N.: Mechanics of a turning snow ski, Int. J. Mech. Sci, Vol. 36, N. 5, pp. 421-429, 1994

[Ho83] Howe, J.: Skiing Mechanics, Poudre Press, Laporte, Colorado, 1983

[Hü91] HÜTTE, Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 29. Auflage, Horst Czichos Herausgeber, Springer, Berlin 1991

[ISO95] ISO 6289, Skis – Terms and Definitions, International Organization for Standardization (ISO), Genf, Schweiz 1985

[LM84] Lieu, D.K., Mote, C.D., Jr.: Experiments in the machining of ice at negative rake angles. Journal of Glaciology 30, 77-81, 1984

[LM85] Lieu, D. K., Mote, C.D. Jr.: Mechanics of the Turning Snow Ski, pp. 117-140 in: Skiing Trauma and Safety: Fifth International Symposium, ASTM STP 860, R.J. Johanson and C.D. Mote, Jr., Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985

[LS97] Lind, D., Sanders, S.P.: The physics of skiing: skiing at the triple point. American Institute of Physics, Woodbury, NY, 1997

[Mö97] Mössner, M., Nachbauer, W., Schindelwig, K.: Einfluß von Skitaillierung auf Schwungradius und Belastung. Sportverl.-Sportschad. 11, pp. 140-145, 1997

[Mö98] Mössner, M.: Der Schwungradius beim Skifahren, 1998, Kap. 4 der Dissertation (in Vorbereitung)

[No99] Nordt, Alison A.: Design of alpine skis, Dissertation, Department. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, CA, USA, 1999

[ÖN] ÖNORM S 4020, Ski und Skilauf, Begriffsbestimmungen. Österreichisches Normungsinstitut, Wien 1990

[PW92] Pestel, E., Wittenburg, J.: Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre. BI Mannheim, 2. überarbeitete Auflage, 1992

[RM91] Renshaw, Anthony A. and Mote, C.D. Jr.: A Model for the Turning Snow Ski. pp. 217-238 in: Skiing Trauma and Safety: Eigth International Symposium, ASTM STP 1104, C.D. Mote, Jr. And Robert J. Johnson, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1991

[SGH95] Schnell, W., Gross, D., Hauger, W.: Technische Mechanik, Band 2, Elastostatik, Springer Verlag, 5. Auflage, 1995

[SJSB97] Shapiro, Lewis H., Johnson, Jerome B., Sturm, Matthew, Blaisdell, George L.: Snow Mechanics. Review of the State of Knowledge and Applications, U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL), Hanover, New Hampshire, USA, 1997

[Vi39] Vietoris, L.: Der Schi im Licht der Festigkeitslehre. Zeitschrift f. d. math.-naturwiss. Unterricht, 70, pp.2-9 und pp. 56-63, 1939

Anhang:
Abb. 12 Abhängigkeit des Kurvenradius vom Parameter für die Schneehärte

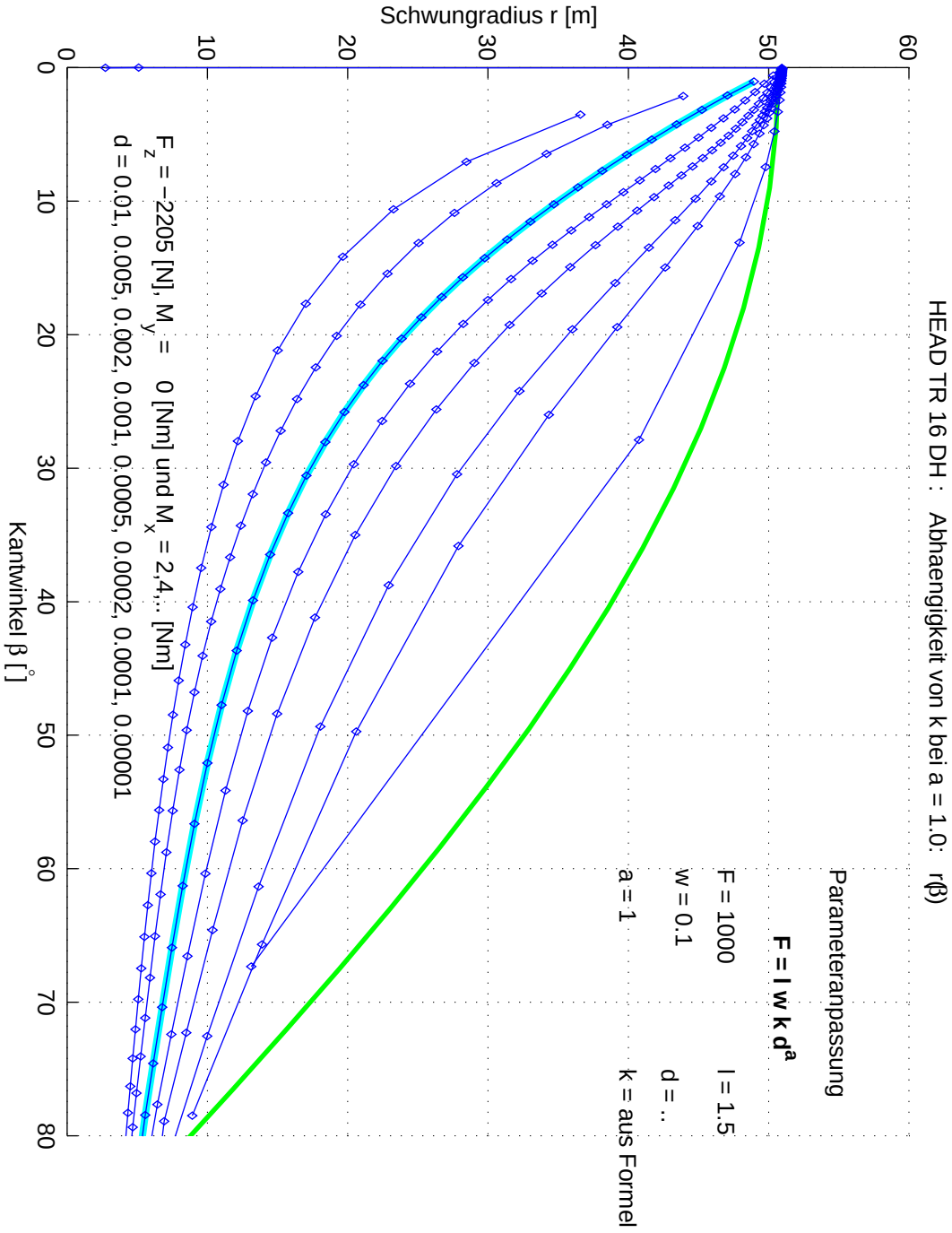

Abb. 13 Abhänigkeit des Kurvenradius vom Exponenten in der Formel für die Schneehärte

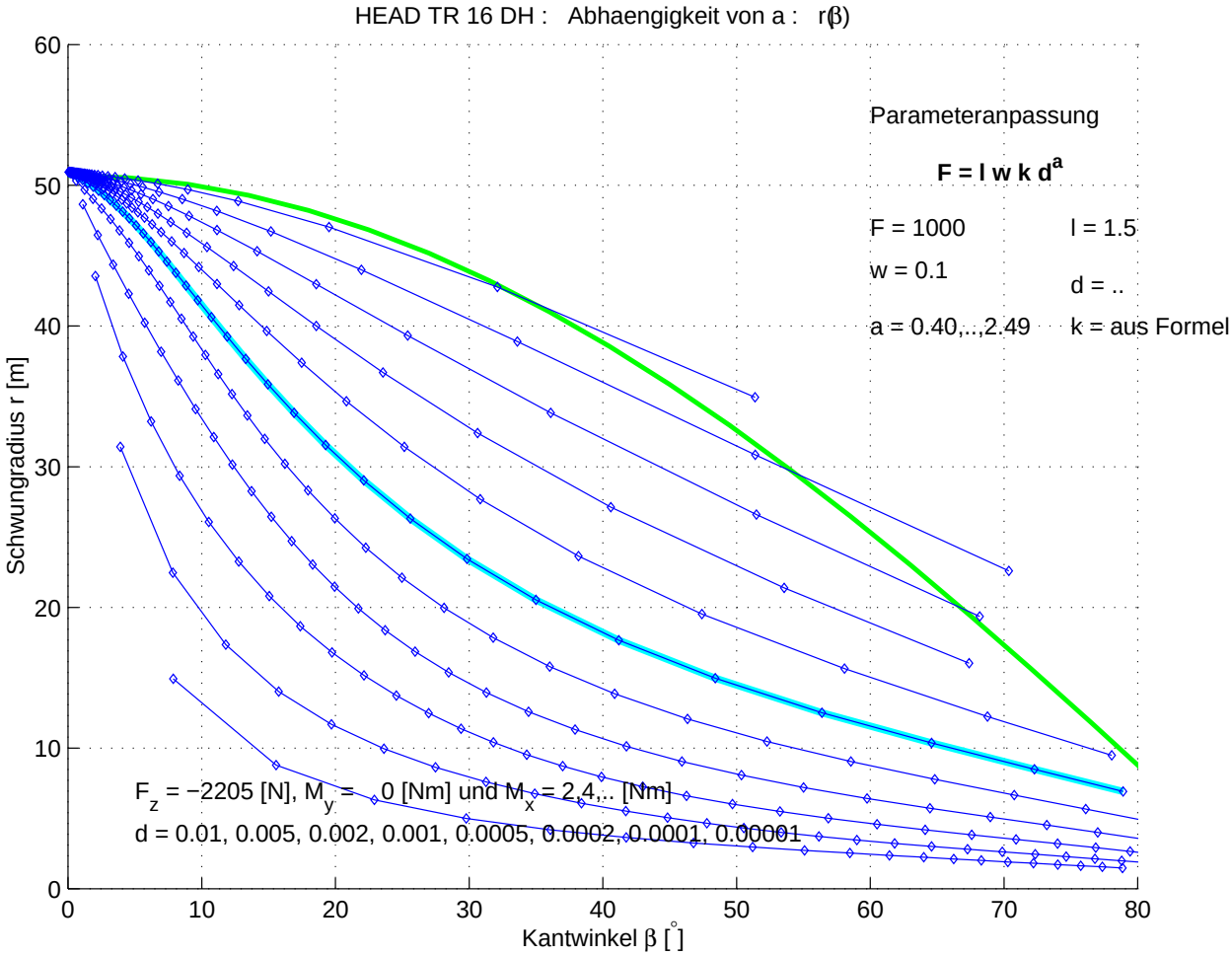

Abb. 14 Abhängigkeit des Kurvenradius von der Belastung normal zur Lauffläche

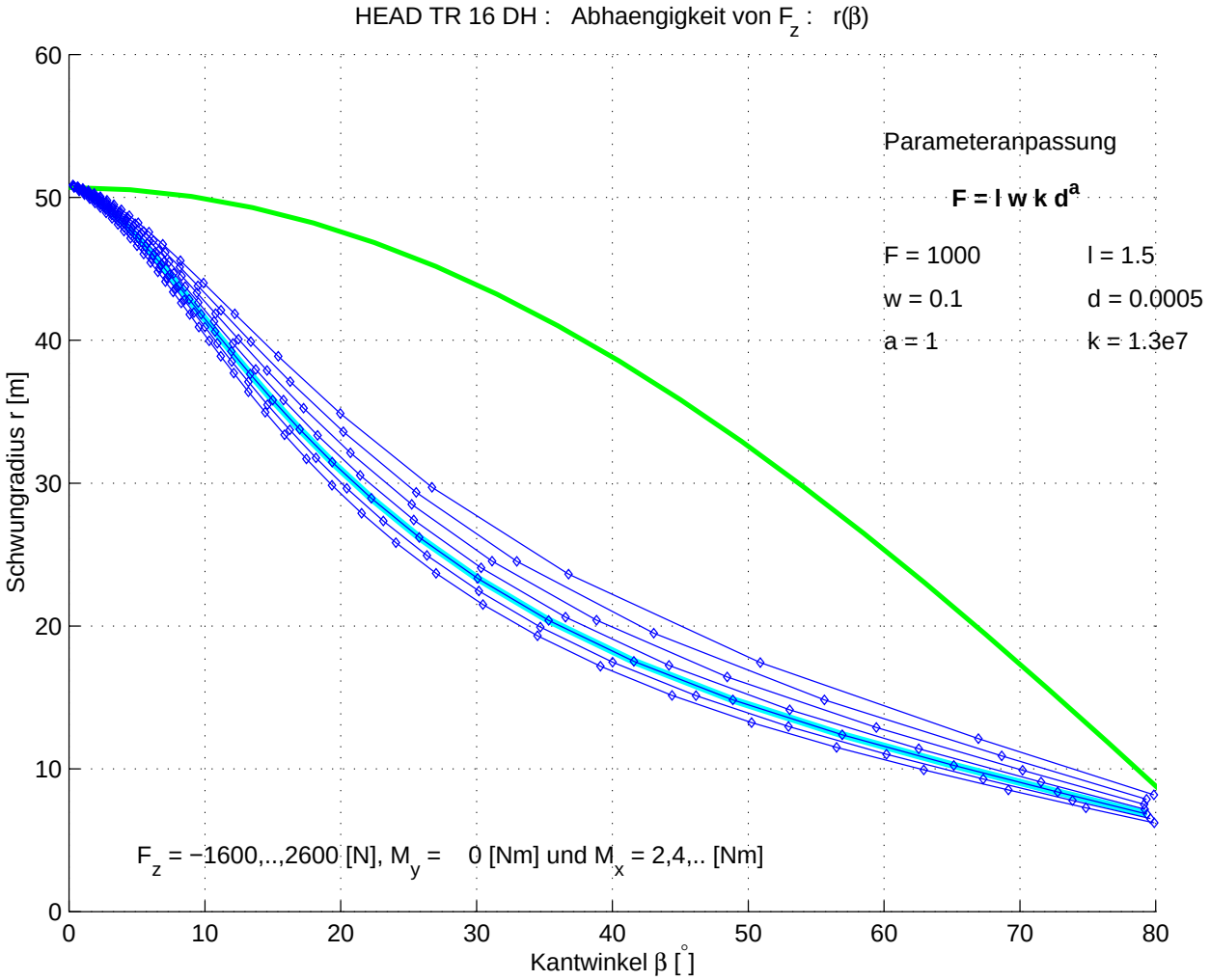

Abb. 15 Abhängigkeit des Kurvenradius von Vor- oder Rücklage

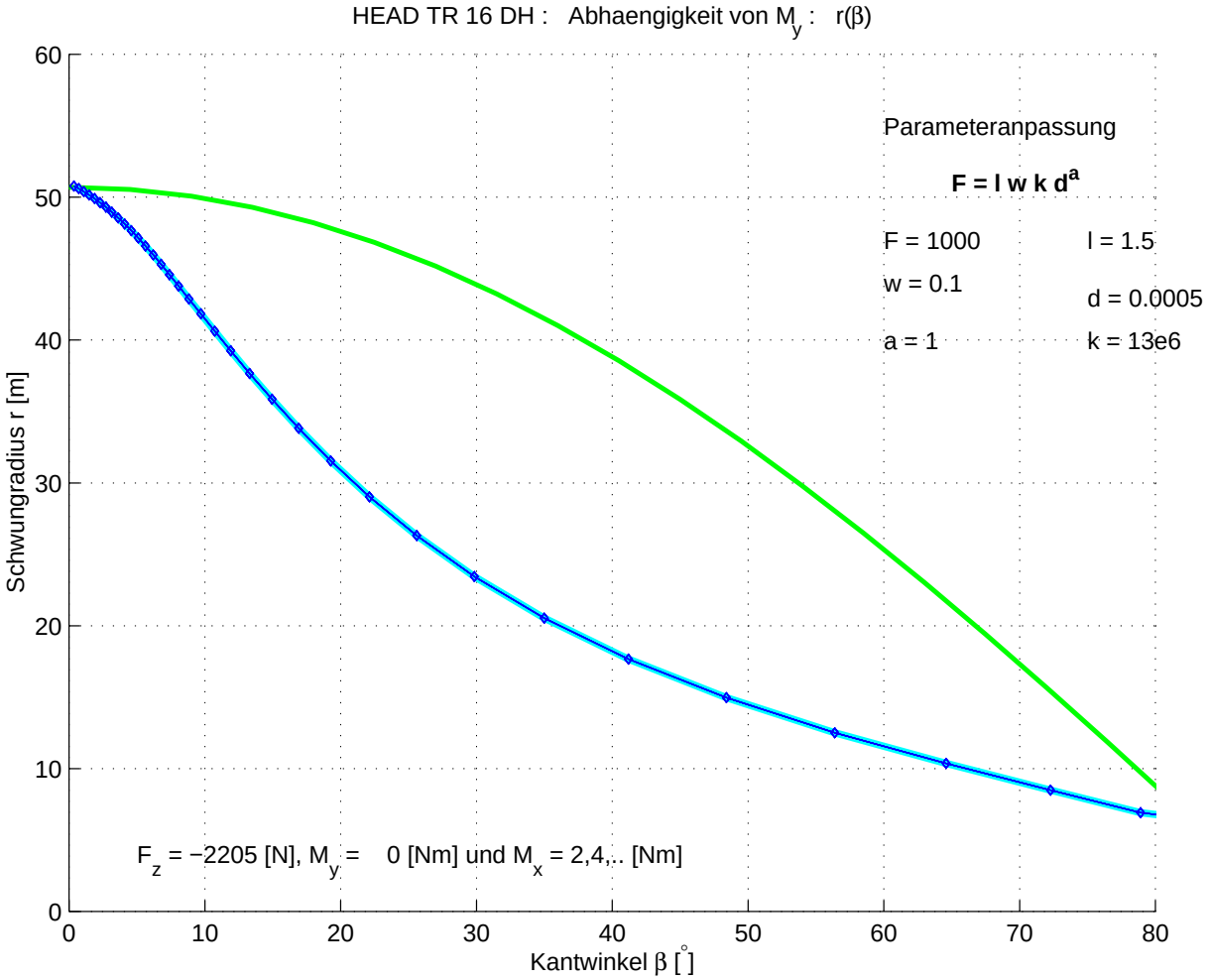

Abb. 16 Abhängigkeit des Kurvenradius vom Verlauf der Biegesteifigkeit *EI*

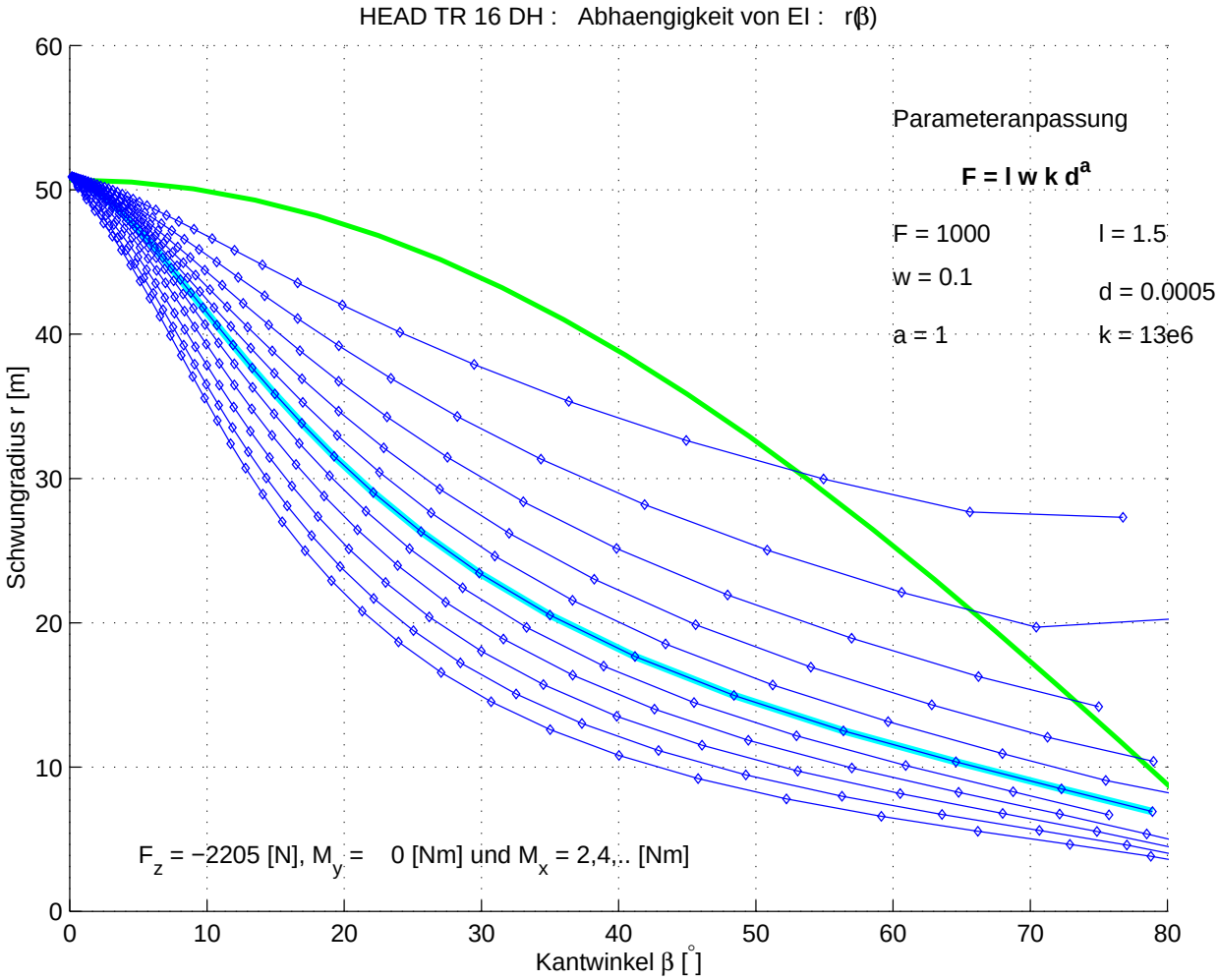

Abb. 17 Verlauf der Biegesteifigkeiten

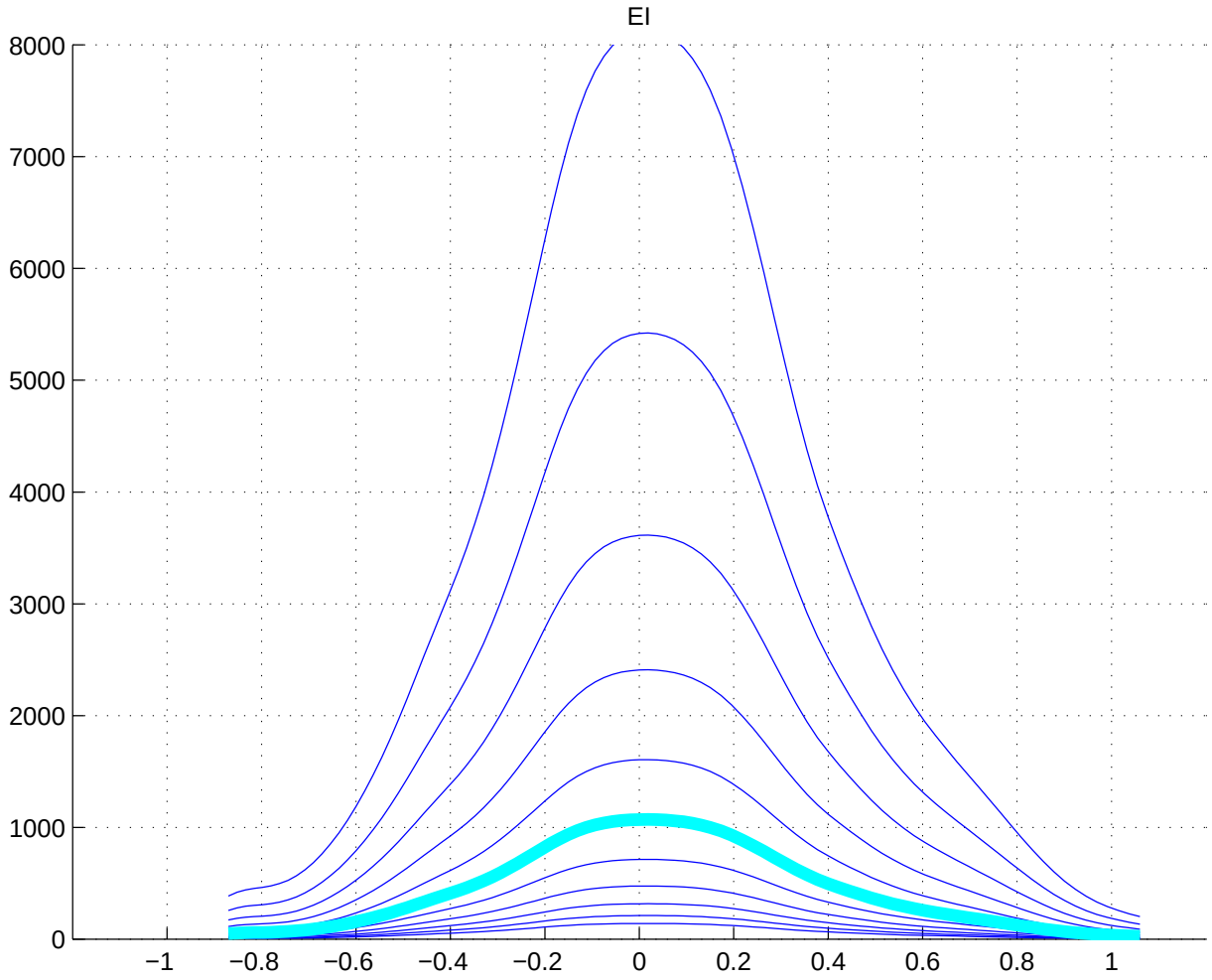
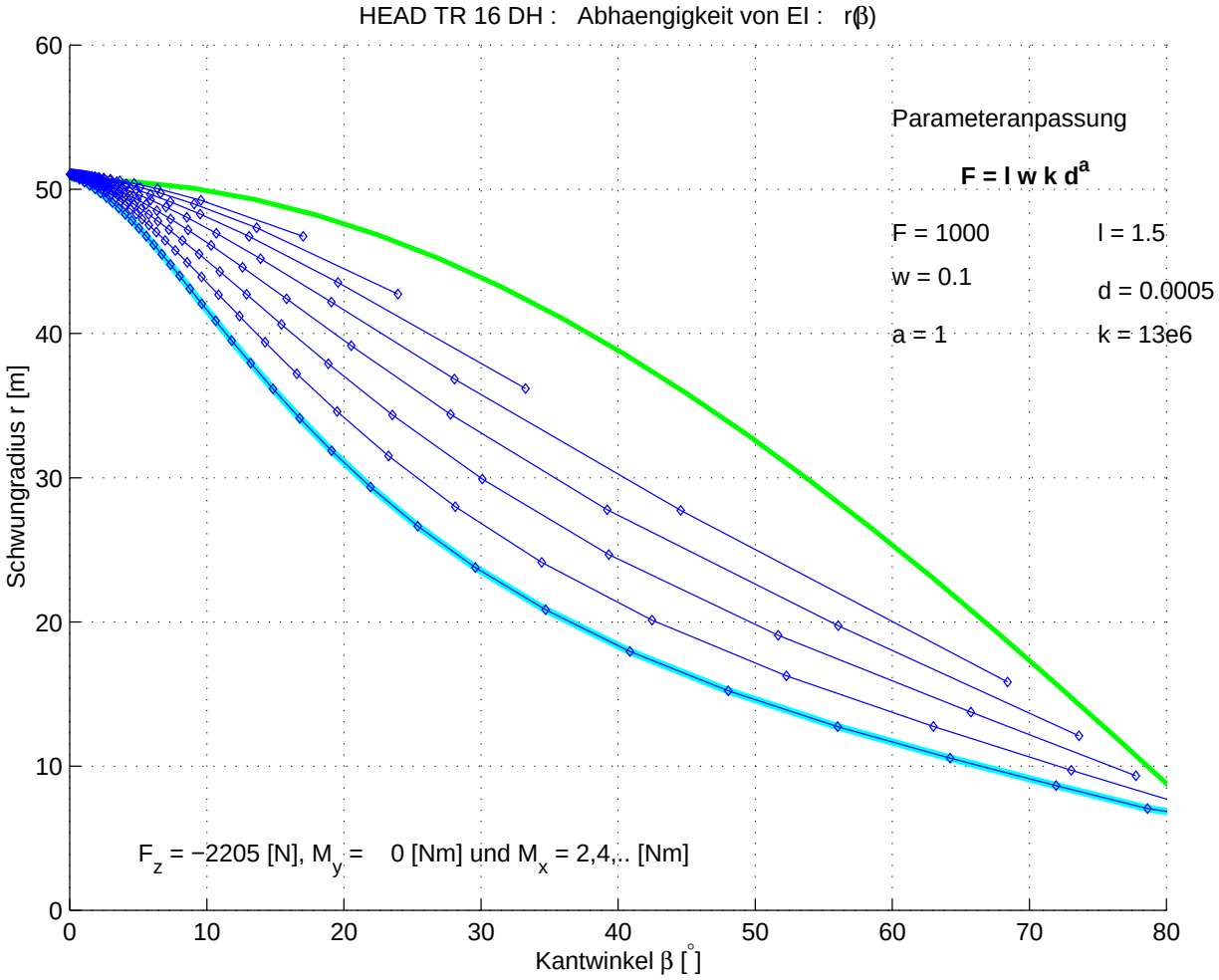
Abb. 18 Abhängigkeit vom Skiradius