

**M. Mössner, W. Nachbauer, and K. Schindelwig,
Einfluss der Skitaillierung auf Schwungradius und Belastung (Influence of the
Ski's Sidecut on the Turning Radius and Strain),
Sportverletzung Sportschaden, 1997**

Reference: M. Mössner¹, W. Nachbauer², and K. Schindelwig³ *Einfluss der Skitaillierung auf Schwungradius und Belastung (Influence of the Ski's Sidecut on the Turning Radius and Strain)*, Sportverletzung Sportschaden **11** (1997), 140–145.

Zusammenfassung: Um den Einfluss der Skitaillierung auf den Schwungradius zu untersuchen, wird im ersten Teil dieser Arbeit der Radius der Spur eines selbstfahrenden Schlittens ermittelt und mit der Vorhersage nach Howe verglichen. Es zeigt sich, dass die Schwungradien zu Beginn des Schwunges zwischen 65 und 85 % des theoretisch erwarteten Wertes betragen. Im zweiten Teil wird der Verlauf des Schwungradius eines Carverfahrers bestimmt und daraus, mittels Geschwindigkeitsmessung, die angreifenden Kräfte berechnet. Es ergibt sich eine starke Reduktion des Schwungradius, welche zu einer deutlichen Erhöhung der Belastung führt. Modellrechnungen zeigen den großen Einfluss von Skitaillierung und Geschwindigkeit auf die Belastung. Schon kleine Geschwindigkeitsänderungen führten bei Carverski zu großen Belastungsänderungen.

Abstract: The first part of this paper deals with the influence of the side cut on the turn radius, which was examined by measuring the turn radius of a self-running sledge-like construction and by comparing it to Howe's prediction. The turn radius at the beginning of the turn has proved to be between 65 and 85 % of the theoretically expected result. In the second part a carver's turn radius was determined and the reaction force acting on the skier was calculated. The result shows a strong reduction of the turn radius along the path which increases the load on the skier. The effect of side cut and velocity on the load was examined. Using carver skis even small changes in velocity resulted in considerable load changes.

¹Dept. of Sport Science, Univ. Innsbruck, AT. email: Martin.Moessner@uibk.ac.at

²Dept. of Sport Science, Univ. Innsbruck, AT

³Dept. of Sport Science, Univ. Innsbruck, AT

1 Problemstellung

Die Taillierungsradien herkömmlicher Ski lagen viele Jahre zwischen ca. 40 und 80 m. Carverski weisen mit ca. 15 bis 25 m deutlich geringere Radien auf. Die veränderte Seitengeometrie erlaubt geschnittene Schwünge mit kleinen Schwungradien wie sie früher nicht gefahren werden konnten.

Howe [2] formulierte einen Zusammenhang zwischen Skitaillierung, Kantwinkel und Schwungradius. Einflussgrößen wie Skisteifigkeit und Schneebeschaffenheit werden dabei vernachlässigt. In der ersten Zielsetzung der Arbeit wurde deshalb die Anwendbarkeit der Formel von Howe zur Vorhersage des Schwungradius aus der Skitaillierung geprüft. Um Aktivitäten des Skifahrers auszuschließen, wurde ein selbstfahrender Schlitten gebaut und die Fahrspur des Schlittens geodätisch vermessen.

Die Verkleinerung des Schwungradius bedingt eine Erhöhung der auf den Skifahrer wirkenden Kräfte. Die zweite Zielsetzung beinhaltete die Bestimmung der Belastung beim Carven anhand eines Fallbeispiels. Dazu wurden aus Spur- und Geschwindigkeitsmessung die auf den Skifahrer wirkenden Kräfte bestimmt und anhand von Modellrechnungen der Einfluss der Skitaillierung und der Fahrgeschwindigkeit auf die Kräfte abgeschätzt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Kräfte beim Schwung

In den durchgeführten Berechnungen wirken auf den Skifahrer nur Schwer- und Zentripetalkraft. Reibungskräfte, Luft- und Schneewiderstand, sowie vom Skifahrer erzeugte Kräfte werden vernachlässigt. Ferner sind die Ski zu einem Monoski zusammengefasst. In diesem Fall übt der Skifahrer auf den Schnee die laterale Kraft

$$(1) \quad L = \frac{mv^2}{r} - mg \sin \alpha \cos \beta$$

und die Normalkraft

$$(2) \quad N = mg \cos \alpha$$

aus. Zusammen ergibt sich die Reaktionskraft des Ski auf den Schnee

$$(3) \quad R = \sqrt{L^2 + N^2}.$$

m ist die Masse des Skifahrers mit Ausrüstung, v die Geschwindigkeit, ϑ der Kantwinkel und r der Schwungradius des Skifahrers. g steht für die Erdbeschleunigung, α für die Hangneigung und β für den Winkel zwischen Hangwaagrechten und Tangente an die Fahrspur. Bei einem Schwung aus der Hangwaagrechten in diese zurück steigt β von 0 auf 180° an.

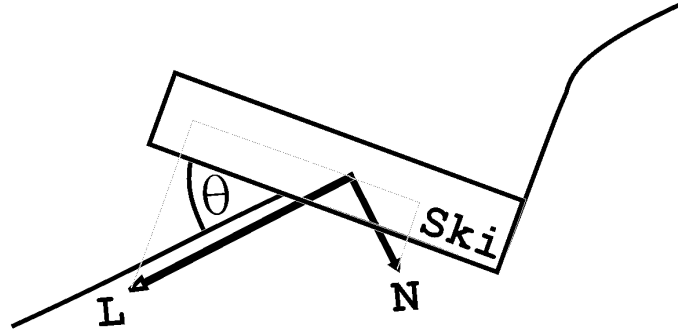


Fig. 1: Kräfte des Ski auf den Schnee

Aufgrund der Normalkraft gräbt sich der Ski in den Schnee und bildet einen Schneekeil (Fig 1). Solange der Ski nicht seitlich aus der Spur geschoben wird und die Schneefestigkeit die laterale Kraft kompensieren kann, bewegt sich der Skifahrer entlang dieses Schneekeils.

Seitliches Rutschen tritt auf, wenn $L \cos \vartheta > N \sin \vartheta$ ist. Einsetzen von L und N ergibt:

$$(4) \quad \frac{v^2}{gr \cos \alpha} - \tan \alpha \cos \beta > \tan \vartheta.$$

Abscheren von Schnee wurde von Lieu und Mote [5] untersucht. Sie bestimmten eine empirische Formel für die Festigkeit von Eis. Bei einer Eindringtiefe von d [m] und einem Kantwinkel von ϑ [°] kann Eis Belastungen bis zu

$$(5) \quad F = \left(\frac{16120}{\sin^{3.7} \vartheta} - 15510 \right) (39.37d)^{0.7-0.37\vartheta}$$

[N/m] aufnehmen. Die Autoren geben für Schnee einen Korrekturfaktor von 0.02 an.

2.2 Schwungradradius geschnittener Schwünge

In diesem Abschnitt folgen wir den Überlegungen von Howe [2]. Der aufgekantete Ski wird unter Belastung durchgebogen bis der Schneewiderstand den angreifenden Kräften entspricht. Die Projektion der verformten Skikante auf den Hang ergibt in erster Näherung ein Kreissegment. Man spricht von einem geschnittenen Schwung, wenn sich der Ski entlang dieses Kreises weiterbewegt. Bei solchen Schwüngen verliert der Skifahrer keine Energie durch seitliches Rutschen und/oder Abscheren.

Die Projektion der Durchbiegung zwischen Schaufel und Skimitte auf den Hang b ergibt sich aus der Taillierung T und der Eindringtiefe d (Fig 2 a). Als Taillierung T wird die maximale Einbuchtung des Ski entlang der Seite bezeichnet. Aus den drei Breitenmessungen an Schaufel S , Skimitte M und Skiende H berechnet sich

$$(6) \quad T = \frac{S + H - 2M}{4}.$$

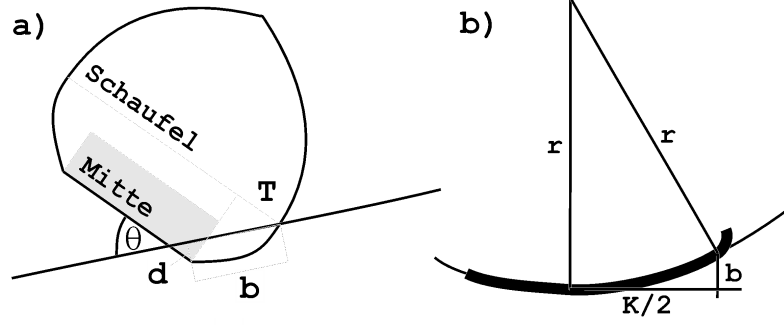


Fig. 2: a) Ski von vorne. b) Skispur des schneidenden Ski von oben.

Aus Fig 2 a entnimmt man die Beziehung

$$(7) \quad b = \frac{T}{\cos \vartheta} + d \tan \vartheta.$$

Wenn unterschiedliche Eindringtiefen von Schaufel d_S , Skimitte d_M und Skiende d_H berücksichtigt werden, ist

$$(8) \quad d = \frac{2d_M - d_S - d_H}{2}$$

zu setzen.

In Fig 2 b ist eine Aufsicht des Hanges dargestellt. r bezeichnet den Radius des geschnittenen Schwunges. Die Skispitze weist von der Tangente an die Skimitte einen Normalabstand von b auf. Ist K die Länge der Kontaktfläche zwischen Ski und Schnee, so gilt $r = \frac{K^2 + 4b^2}{8b}$. Unter Vernachlässigung von b^2 ergibt sich mit Eq 7

$$(9) \quad r = \frac{K^2 \cos \vartheta}{8(T + d \sin \vartheta)}.$$

Im Grenzfall verschwindend kleiner Eindringtiefe vereinfacht sich die Beziehung weiter zu

$$(10) \quad r_H = r_S \cos \vartheta \quad \text{mit} \quad r_S = \frac{K^2}{8T}.$$

Der Skiradius r_S ist eine Approximation an den Krümmungsradius der Taillierungskurve. r_H steht für den Schwungradius nach Howe.

2.3 Veränderung des Schwungradius geschnittener Schwünge

Beim geschnittenen Schwung sind Kantwinkel ϑ und Schwungradius r durch $r = r_S \cos \vartheta$ verknüpft. Die Innenlage des Skifahrers φ ergibt sich aus $\tan \varphi = \frac{N}{L}$. Innenlage und Kantwinkel sind nicht unabhängig voneinander: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta + \gamma$, wobei

γ die Differenz zwischen Innenlage des Skifahrers und Innenlage des Unterschenkels ist. Dieser Winkel kann nur in einem schmalen Bereich variiert werden. Ist $\gamma < 0$, so beginnt der Skifahrer wegen Eq 4 seitlich zu rutschen. Bei beliebiger Vorgabe von γ erhalten wir eine nichtlineare Gleichung zwischen Schwungradius r , Geschwindigkeit v und gefahrenem Kreissegment β :

$$(11) \quad \frac{v^2}{gr} - \sin \alpha \cos \beta = \tan \left(\arccos \left(\frac{r}{r_S} \right) - \gamma \right) \cos \alpha.$$

Im einfachsten Fall γ gleich 0 reduziert sich (11) zu:

$$(12) \quad r^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta) - 2r \frac{v^2}{g} \sin \alpha \cos \beta + \frac{v^4}{g^2} - r_S^2 \cos^2 \alpha = 0.$$

Der Schwungradius verkleinert sich entlang der Spur (β ansteigend). Die Reduzierung des Radius ist umso größer, je größer die Geschwindigkeit und je kleiner der Skiradius ist. Durch die Abnahme des Schwungradius steigt die laterale Kraft. Im Laufe des Schwunges kann es passieren, dass Eq 4 erfüllt wird und der Ski seitlich zu rutschen beginnt. Ebenso kann durch das Ansteigen der lateralen Kraft die Festigkeit des Schnees überschritten werden. In diesen Fällen ist ein geschnittener Schwung nicht mehr möglich.

3 Methode

3.1 Messung mit Skischlitten

Zur Bestimmung des Schwungradius wurde ein selbstfahrender Schlitten (Fig 3) gebaut. Dieser besteht aus einem Gestell von Stahlschienen und Rohren, welche gelenkig miteinander verbunden sind. An der Unterseite des Schlittens wurden die Ski so montiert, dass mit Kantwinkeln und Gewichtsverlagerungen experimentiert werden kann.

In dieser Arbeit werden ausgewählte Messungen von Sölden im Ötztal, Hochfügen im Zillertal und St. Christoph am Arlberg präsentiert. Die Hänge waren nahezu eben mit Neigungen von 8° , 11° und 13° . Als Kantwinkel wurde bei allen Fahrten 18° gewählt. Der Schlitten wurde durch Gewichtsscheiben soweit belastet, dass das Gesamtgewicht dem einer erwachsenen Person entsprach. Nach jeder Fahrt wurden 6 bis 40 Punkte der Spur des Außenski geodätisch vermessen. Begleitende Daten wie Skimodell, Kantwinkel, Schneehärte etc. wurden registriert. Die Messungen wurden unter Mitwirkung von Jenner im Rahmen ihrer Diplomarbeit durchgeführt [3].

3.2 Messung eines Skifahrers mit Carverski

Neben den Schlittenmessungen wurde auch eine Fahrt mit einem Carving-erfahrenen Skilehrer durchgeführt und geodätisch vermessen. Die Messung fand in Sölden im

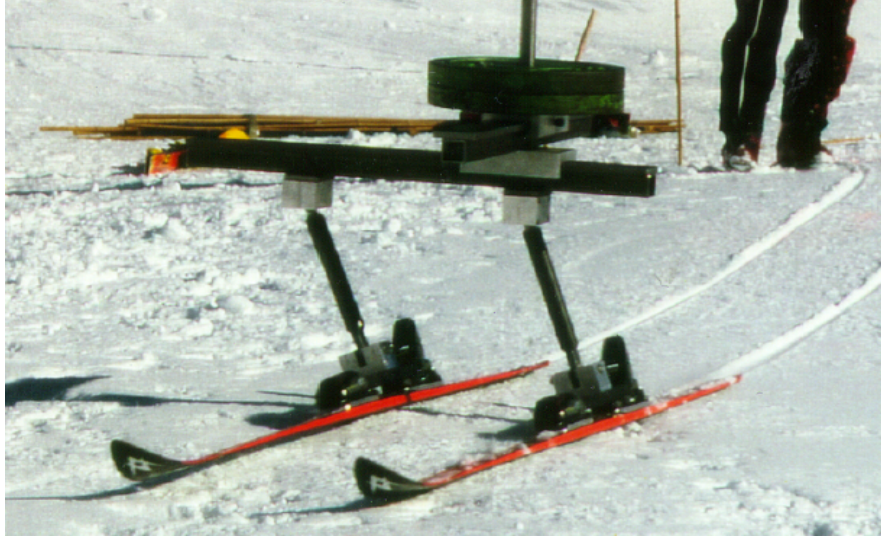


Fig. 3: Skischlitten

Ötztal auf einem ebenen Hang mit einer Neigung von 16° statt. Die Masse des Skifahrers samt Ausrüstung betrug 92 kg. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit in der Endphase des Schwunges wurden zwei Lichtschranken in einem Abstand von 7.5 m aufgebaut.

3.3 Verwendete Skier

Die geometrischen Merkmale der verwendeten Ski sind in Tab 1 zusammengefasst.

Ski	S [mm]	M [mm]	H [mm]	K [m]	L [m]	T [mm]	r_S [m]
V	89	63	78	1.80	1.95	10	39.5
B	109	61	96	1.77	1.93	21	18.9
A	91	61	78	1.84	2.03	12	36.0
H	109	61	97	1.60	1.80	21	15.2

Tab. 1: Geometrische Merkmale der verwendeten Ski. Völkl RS P20 (V), Blizzard Carver (B), Atomic RS Arc (A) und Head Cyber Space (H). Breite von Schaufel S , Skimitte M und Skiende H , Kontaktlänge K , Skilänge L , Tailierung T , Skiradius r_S .

3.4 Auswertung

Zum Ausgleich von Unebenheiten des Hanges wurden die geodätischen Messdaten auf die Ausgleichsebene projiziert. Dies führte zu ebenen Datenpunkten (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots$

Als mittleren Radius verwendeten wir den Radius des Ausgleichskreises [6]. Der Kreis ist durch Angabe des Mittelpunktes (u, v) und des Radius r eindeutig bestimmt. Als Maß für die Abweichung der Messdaten vom Kreis berechneten wir die Residuen

$$(13) \quad \epsilon_i = (x_i - u)^2 + (y_i - v)^2 - r^2.$$

u, v und r wurden so bestimmt, dass die quadratische Summe der Residuen minimal wird:

$$(14) \quad f(u, v, r) = \sum \epsilon_i^2 \mapsto \min.$$

Das Verfahren ist ab drei Messpunkten anwendbar. Zum Ausgleich von Messfehlern wurden jedoch bis zu 40 Datenpunkte verwendet.

Zur Bestimmung der Veränderung des Schwungradradius entlang der Spur wurden glättende Splines $x(s)$ und $y(s)$ durch die Datenpunkte gelegt. Die Krümmung im Kurvenpunkt $(x(s), y(s))$ ist gegeben durch [1]:

$$(15) \quad \kappa(s) = \frac{\dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)}{(\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Schwungradradius ist der Kehrwert des Betrages der Krümmung

$$(16) \quad r(s) = \frac{1}{|\kappa(s)|}.$$

4 Ergebnisse

4.1 Skischlitten

In Tab 2 sind die theoretisch erwarteten Schwungradradien (Radius nach Howe r_H) und die mittleren Schwungradradien aus den Schlittenmessungen (Radius des Ausgleichskreises r_A) gegenübergestellt. Es sind jeweils Mittelwerte aus ein paar Fahrten angegeben. Nach Gleichung Eq 9 sollten die gemessenen Werte etwas kleiner als die berechneten sein. Dies trifft für die Messungen V und B zu, nicht jedoch für A und H. Aufgrund des konstanten Kantwinkels bei den Schlittenversuchen müsste nach der Theorie auch der Schwungradradius einen konstanten Wert aufweisen. Die Residuen der Ausgleichskreise zeigen systematische Fehler, was auf die Veränderung des Schwungradradius hindeutet. Die Ergebnisse der Krümmungsberechnung entlang der Spur zeigen 1) dass die Schwungradradien entweder konstant sind oder zunehmen und 2) dass die Schwungradradien zu Beginn des Schwunges zwischen 64 und 86 % des theoretisch erwarteten Wertes betragen.

Versuch	r_H [m]	r_A [m]	n	σ [m]
V	37.6	35.0	10	2.3
B	17.9	15.7	1	
A	34.2	41.8	4	3.6
H	14.5	19.5	6	1.0

Tab. 2: Gegenüberstellung der theoretischen r_H zu den mittleren gemessenen Schwungradien r_A der Ski Völkl (V), Blizzard (B), Atomic (A) und Head (H). Anzahl der Datenpunkte n , Streuung der Messwerte σ .

4.2 Skifahrer mit Carverski

In Fig 4 ist der gemessene und berechnete Schwungradius entlang der Spur für den Skifahrer mit dem Carverski dargestellt. Der gemessene Krümmungsradius verkürzt sich von 14 auf 6 m. Der berechnete Verlauf nach Eq 12 stimmt qualitativ mit der Messung überein.

Zur Berechnung der Reaktionskraft R (Eq 3) wird neben dem Schwungradius auch die Fahrgeschwindigkeit benötigt. Aus der Lichtschrankenmessung und der Bogenlänge der Spur zwischen den Lichtschranken ergibt sich eine Geschwindigkeit von 11.2 m/s für den letzten Teil des Schwunges. Basierend auf Luft- und Gleitreibungsangaben [4] schätzen wir eine Geschwindigkeitszunahme im Laufe des Schwunges von 9 auf 11 m/s. Die Reaktionskraft für den gemessenen Schwungradius steigt von 1000 auf 2500 N an (Fig 5). Aufgrund des kleineren berechneten Schwungradius liegen die theoretischen Kraftwerte etwas über den Werten für den gemessenen Schwungradius.

Am Ende des Schwunges ($\beta = 180^\circ$) beträgt $v = 11$ m/s und $r = 6$ m. Daraus ergibt sich eine Innenlage φ von 23° und ein Kantwinkel ϑ von 67° für den Monoskifahrer. Ein geschnittener Schwung ist bei diesen Bedingungen nicht mehr möglich, laut Eq 4 beginnt der Ski seitlich zu rutschen und laut Eq 5 wird Schnee abgeschert.

5 Diskussion

5.1 Vergleich gemessener und berechneter Schwungradien

Der Vergleich gemessener und berechneter Schwungradien wurde anhand der Schlittenversuche und eines Carverschwunges durchgeführt. Bei den Schlittenversuchen wurde der Kantwinkel mit 18° konstant vorgegeben. Nach der Formel von Howe sollte der Schlitten eine kreisförmige Spur beschreiben, was nur teilweise der Fall war. Bei mehreren Fahrten wurde ein deutliches Anwachsen des Schwungradius beobachtet. Dieses Anwachsen führen wir auf seitliches Rutschen aufgrund des kleinen Kantwinkels von 18° zurück. Deshalb wurden zur Überprüfung der Formel von Howe nur die Anfangswerte der Schwungradien verwendet. Diese betragen zwischen 65

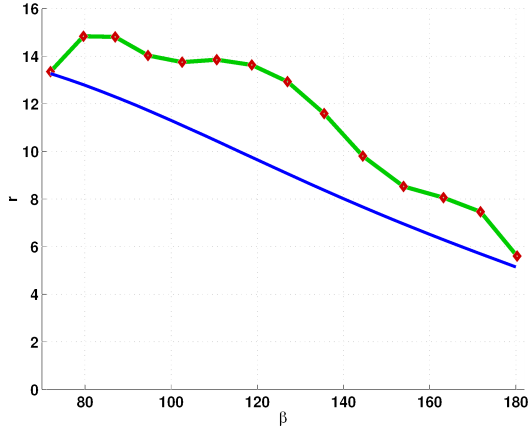


Fig. 4: Schwungradius des Skifahrers entlang der Spur von Messung (—*) und Berechnung (—).

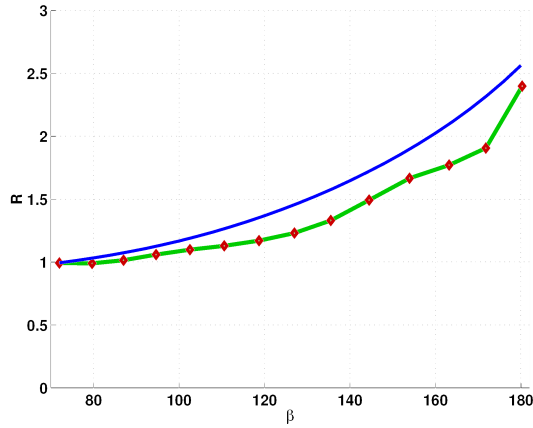


Fig. 5: Reaktionskraft des Skifahrers auf den Schnee für Messung (—*) und Berechnung (—).

und 85 % der theoretischen Werte. Für die Fahrten mit konstantem Schwungradius treffen dieselben Prozentangaben zu.

Die kleineren gemessenen Radien lassen sich durch das Eindringen des Ski in den Schnee, welches in der Formel von Howe nicht berücksichtigt ist, erklären. Bei einer Eindringtiefe von 10 mm reduziert sich für einen Carver mit 10 mm Taillierung der Schwungradius um 23 % und liegt damit im Bereich der gemessenen Werte. Das Eindringen des Ski hängt neben der Skigeometrie von Schneebeschaffenheit sowie Biege- und Torsionssteifigkeit des Ski ab [7]. In der Formel von Howe wird das Eindringen des Ski in den Schnee überhaupt nicht berücksichtigt. Dennoch ergibt sich eine qualitativ richtige Vorhersage des Schwungradius. Dies spiegelt den großen Einfluss von Skiradius und Kantwinkel auf den Schwungradius wider.

Im Gegensatz zu den Schlittenfahrten ergibt sich beim Carverschwung eine deutliche Reduktion des Schwungradius entlang der Spur. Die Verkleinerung wird durch die Zunahme der lateralen Kraft verursacht. Um diese Kraft auszugleichen, muss sich der Skifahrer immer stärker nach innen legen. Als Folge wird der Ski stärker aufgekantet und der Schwungradius verkleinert. Dieser Vorgang wird durch Gleichung Eq 12 beschrieben. Die Lösung dieser Gleichung ergibt eine qualitativ gute Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Schwungradien für den Carverschwung.

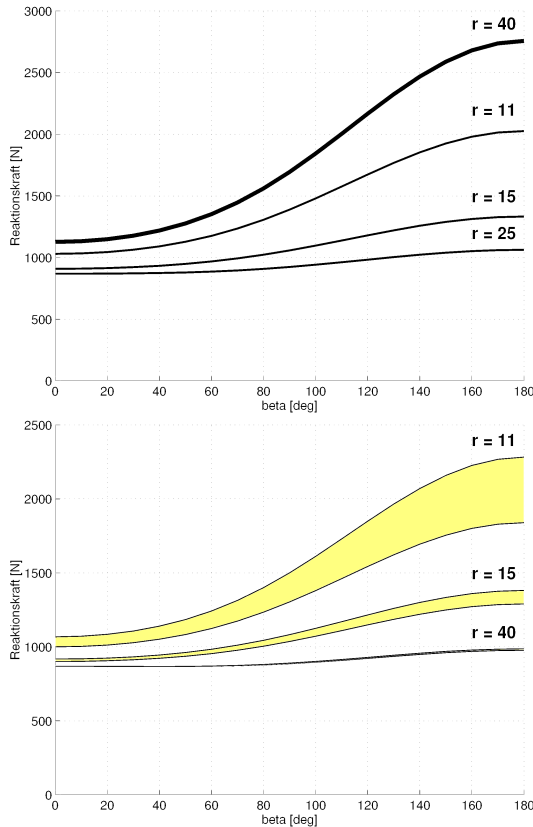


Fig. 6: Reaktionskraft auf den Skifahrer. Es werden Carverschwünge mit 9 m/s und Skiradien von 11, 15 und 25 m und ein Super-G Schwung mit 18 m/s und 40 m Skiradius verglichen.

Fig. 7: Reaktionskraft auf den Skifahrer mit Skiradien von 11, 15 und 40 m für Geschwindigkeiten im Bereich von 9 ± 0.2 m/s.

5.2 Belastung des Skifahrers

Anhand eines Fallbeispiels wurde gezeigt, dass beim Carverschwung große Belastungen auftreten können. Verursacht werden diese Belastungen durch 1) den kleinen Schwungradius aufgrund der großen Taillierung und 2) die starke Reduktion des Schwungradius im Laufe des Schwunges.

Die qualitativ gute Übereinstimmung von gemessenen und berechneten Radien beim Carverschwung erlaubt die Verwendung von Eq 12 zur Vorhersage des Schwungradius. Aus dem Schwungradius- und Geschwindigkeitsverlauf ergibt sich die Reaktionskraft.

Fig 6 zeigt die Reaktionskraft für Skiradien von 11, 15 und 25 m und einer Geschwindigkeit von 9 m/s. Zum Vergleich wird auch die Reaktionskraft für einen Super-G Schwung mit einem Skiradius von 40 m und einer Geschwindigkeit von 18 m/s dargestellt. Die Reaktionskraft steigt mit abnehmender Taillierung nicht-linear an. Wechselt man von einem Ski mit 25 m Radius zu einem Ski mit 15 m Radius, so steigt die Reaktionskraft am Ende des Schwunges lediglich um 330 N an. Eine weitere Skiradiusverkürzung von 15 auf 11 m erhöht die Reaktionskraft um 630 N. Bei der geringen Geschwindigkeit von 9 m/s bleibt die Reaktionskraft deutlich unter der eines Super-G Schwunges. Bei der geringfügig größeren Geschwindigkeit von 9.5 m/s wird diese jedoch bereits überschritten, was die große Bedeutung der Geschwindigkeit auf die Reaktionskraft zeigt.

In Fig 7 ist der Einfluss einer geringfügigen Geschwindigkeitsänderung auf die Reaktionskraft dargestellt. Gezeigt wird die Reaktionskraft für Skiradien von 11, 15 und 40 m bei Geschwindigkeiten von 9 ± 0.2 m/s. Sowohl die absolute Größe als auch die Variation der Reaktionskraft ist bei den Skiradien von 15 und 40 m unbedenklich. Dies trifft jedoch nicht auf für den Ski mit 11 m Radius zu. Der absolute Wert steigt auf etwa 2000 N und hat eine Schwankungsbreite von 440 N. Schon eine sehr kleine Änderung der Geschwindigkeit führt zu einer deutlichen Änderung der Reaktionskraft.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei Carverski eine starke Reduktion des Radius entlang der Spur auftritt und damit, in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit, hohe Belastungen entstehen können. Bei stark taillierten Ski wirken sich geringe Änderungen der Geschwindigkeit stärker auf den Schwungradradius und damit auf die Belastung aus als bei herkömmlichen Ski.

Dank

Wir danken F. Brunner für die Mithilfe bei der Ausführung der Messungen. Die Messung mit dem Skifahrer wurde von der Skibindungsfirma Tyrolia finanziert.

References

- [1] M.P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Wiesbaden, DE, 1983.
- [2] J. Howe, *Skiing Mechanics*, Poudre Press, Laporte, US-CO, 1983.
- [3] E. Jenner, *Ausgewählte Einflussgrößen auf den Kurvenradius von Alpinschiern unter spezieller Berücksichtigung spezieller Fußstellungen*, Diploma Thesis, Department of Sport Science, University of Innsbruck, AT, 1997.
- [4] P. Kaps, W. Nachbauer, and M. Mössner, *Determination of Kinetic Friction and Drag Area in Alpine Skiing*, Ski Trauma and Skiing Safety: 10th Volume, ASTM STP 1266 (Philadelphia, US-PA) (C.D. Mote, R.J. Johnson, W. Hauser, and P.S. Schaff, eds.), American Society for Testing and Materials (ASTM), 1996, pp. 165–177.
- [5] D.K. Lieu and C.D. Mote, *Experiments in the Machining of Ice at Negative Rake Angles*, Journal of Glaciology **30** (1984), 77–81.
- [6] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, GB, 1992.
- [7] A.A. Renshaw and C.D. Mote, *A Model for the Turning Snow Ski*, Skiing Trauma and Safety, 8th vol., ASTM STP 1104 (Philadelphia, US-PA)

(C.D. Mote and R.J. Johnson, eds.), American Society for Testing and Materials (ASTM), 1991, pp. 217–238.