Messung von Gleitreibung und Luftwiderstand bei Hangschrägfahrt

Peter Kaps
Martin Mössner

Institut für Mathematik und Geometrie
Universität Innsbruck

Werner Nachbauer

Institut für Sportwissenschaften
Universität Innsbruck

vorläufiger Zwischenbericht Mai 1992

Diese Arbeit wurde vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung unterstützt.

Zusammenfassung

Aus Filmaufnahmen von Hangschrägfahrten wird die Bahn eines Schiläufers in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. Der Schiläufer wird durch einen Massenpunkt modelliert, in dem Schwerkraft, Gleitreibung und Luftwiderstand angreifen. Durch numerische Lösung der Bewegungsgleichung wird versucht, den Gleitreibungskoeffizienten und die schädliche Fläche so zu bestimmen, dass der mittlere quadratische Fehler zwischen Lösung und Messwerten minimal wird. Dabei gelingt es, den Gleitreibungskoeffizienten relativ genau zu bestimmen.

Kontaktadresse:
Doz. Peter Kaps
Institut für Mathematik und Geometrie
Technikerstrasse 13
A-6020 Innsbruck, Austria
email: `kaps@mat0.uibk.ac.at`
Tel.: 0512/218-4265
Fax: 0512/218-4036

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Schon 1968 bestimmt Habel den Luftwiderstand und die Gleitreibung auf einer nivellierten, waagrechten Messstrecke durch Messungen nach dem Schleppverfahren und dem Auslaufverfahren. Beim Schleppverfahren wird die Zugkraft bestimmt, beim Auslaufverfahren wird entweder der Energieverlust rechnerisch aus bis auf mm/s genau gemessenen Geschwindigkeiten ermittelt oder die Auswertung durch graphisches Differenzieren der Weg-Zeit-Kurve vorgenommen. Leino, Spring, Suominen (1983) und Leino, Spring (1984) verwenden ebenfalls das Auslaufverfahren, wobei zur Bestimmung der gesuchten Größen aus der analytischen Lösung der Bewegungsgleichung hergeleitete Formeln benutzt werden.

In der vorliegenden Arbeit versuchen wir, die Gleitreibung $\mathbf{F}_f$ und den Luftwiderstand $\mathbf{F}_w$ aus Filmaufnahmen von Hangschrägfahrten zu bestimmen. Aus den Filmaufnahmen ermitteln wir den Ort des Schifahrers als Funktion der Zeit. Die Messgenauigkeit ist wesentlich geringer als bei Habel, dafür sind viele Messdaten verfügbar. Wir verwenden deshalb die Methode der kleinsten Fehlerquadrate und versuchen, den Reibungs- und Luftwiderstand in der Bewegungsgleichung so zu bestimmen, dass der Fehler zwischen berechneter Lösung und gemessenen Daten minimal wird.

Wir formulieren die Bewegungsgleichung als Algebrodifferentialgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_a \\ g(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbf{F}_r$ sind die Zwangskräfte oder Reaktionskräfte,
$\mathbf{F}_a$ die eingeprägten Kräfte und
$g(\mathbf{x})$ die Zwangsbedingungen.

Durch $g(\mathbf{x})$ kann eine beliebige Fahrlinie auf einer beliebigen Fläche vorgegeben werden. Sind die eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_a$ bekannt, kann die Bahn $\mathbf{x}(t)$ eines Schiläufers in Abhängigkeit von der Zeit berechnet werden. Die Reaktionskräfte brauchen nicht gemessen werden, sie sind durch die Zwangsbedingungen festgelegt. Für weitere Informationen über die Mechanik von Mehrkörpersystemen sei auf Schiehlen (1986, 1990) und Haug (1989) verwiesen. Für die numerische Lösung von (1) verwenden wir mit viel Erfolg die kürzlich entwickelten Extrapolationsverfahren von Lubich (1990). Für praxisrelevante Ergebnisse sind die Anforderungen an die Genauigkeit, insbesondere bei der Modellierung der äußeren Kräfte, recht hoch. Im alpinen Schirennsport können bei beachtlichen Streckenlängen Zehntelsekunden über Sieg oder Niederlage entscheiden.

Als ersten Schritt untersuchen wir in dieser Arbeit die Schrägfahrt auf einer schiefen Ebene. Dieses Problem ist bedeutend einfacher zu lösen, da statt der Gleichung einer beliebigen Fläche

$$z = h(x, y), \tag{2}$$

h zweimal stetig differenzierbar, die Gleichung einer Ebene verwendet werden kann:

$$Ax + By + Cz = D, \qquad A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad C > 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung wird noch einfacher, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass die Falllinie in der xz-Ebene liegt. Dann gilt:

$$-x \sin\alpha + z \cos\alpha = D. \tag{4}$$

Es ist zu beachten, dass wir in der Situation von Abb. 5 die Neigung der Ebene α negativ wählen. Trotz seiner Einfachheit liefert dieses Problem interessante Ergebnisse. Wir können die praktische Anwendbarkeit der Mess- und Rechenmethoden testen, die wir für den allgemeinen Fall verwenden wollen. Sind diese Methoden zielführend, erhält man praxisrelevante Ergebnisse zu

(1) Gleiten in der Hangschrägfahrt:

Eine Abfahrtsstrecke kann aus sehr vielen Schrägfahrten bestehen. Trotz der daraus resultierenden Bedeutung des Gleitens wurde es bisher hauptsächlich in der Falllinie untersucht. Resultate über Schrägfahren sind neu. Gleiten in der Hangschrägfahrt spielt als Teil des Schwungs in allen Renndisziplinen eine bedeutende Rolle.

(2) Genauigkeit der Bewegungsgleichung:

Für unsere Berechnungen modellieren wir das Schifahrer-Schi-System durch einen Massenpunkt, in dem Schwerkraft $\mathbf{F}_g$, Gleitreibung $\mathbf{F}_f$ (genauer: Reibung zwischen Schi und Schnee) und Luftwiderstand $\mathbf{F}_w$ angreifen. Somit gilt für die eingeprägten Kräfte:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_w + \mathbf{F}_f. \tag{5}$$

Erstmals lassen sich Aussagen über die Genauigkeit der Modellannahmen treffen, insbesondere der Ansätze für $\mathbf{F}_f$ und $\mathbf{F}_w$.

(3) Materialtests und Fahrstil:
Da die Koeffizienten in den Ansätzen für $\mathbf{F}_f$ und $\mathbf{F}_w$ vom Material und vom Fahrstil des Läufers abhängen, sind quantitative Angaben über die Auswirkungen von verschiedenen Einflussgrößen möglich. Bei unseren Messungen wurde immer derselbe Testfahrer mit demselben Material verwendet, um solche Einflüsse möglichst auszuschließen.

In Abschnitt 2 zeigen wir, wie man aus den Filmaufnahmen von einer Hangschrägfahrt zu Messpunkten $\mathbf{x}_i$ für die Bahn des Schiläufers $\mathbf{x}(t_i)$ zur Zeit t_i gelangt. In den Abschnitten 3 und 4 geben wir einen kurzen Abriss über den derzeitigen Forschungsstand bei Gleitreibung und Luftwiderstand. In Abschnitt 5 leiten wir eine Algebrodifferentialgleichung für die Bewegungsgleichung her. In Abschnitt 6 werden die freien Parameter in der Bewegungsgleichung (das sind Anfgangsgeschwindigkeit, Gleitreibungskoeffizient und schädliche Fläche) so bestimmt, dass die mittleren Abweichungen von Messdaten und berechneter Lösung minimal sind. Dies stellt ein nichtlineares Ausgleichsproblem dar, das wir mit einem Gauß-Newton-Verfahren aus der NAG-Bibliothek (E04GDF) lösen. Aus numerischen Gründen erweist es sich als notwendig, 'exakte' 1-te Ableitungen zu verwenden. Dazu werden die Variationsgleichungen numerisch gelöst. Abschnitt 7 enthält die Berechnung von Konfidenzintervallen für die einzelnen Parameter. In Abschnitt 8 werden die Ergebnisse diskutiert.

2. Filmanalyse

Die Filmaufnahmen wurden am 15. März 1990 in der Umgebung des Restaurants Seewaldalm in Mösern (bei Seefeld) durchgeführt. Auf einem geeigneten Hang wurden zwei fast ebene, ca. 35 m lange Strecken ausgewählt. Die Neigung der Ebenen betrug ca. 20°. Die beiden Ebenen wurden in einem Winkel von 60° bzw. 85° zur Hangfallinie durchfahren. Am Rand dieser Strecken wurden zwei Seile gespannt. Auf den Seilen wurden durch schwarz gefärbte Tennisbälle Paßpunkte im Abstand von einem Meter markiert.

Die tatsächlichen räumlichen Koordinaten dieser Passpunkte wurden durch Messung mit Massband und Winkelmesser bestimmt. Die Genauigkeit der Winkelmessung betrug etwa ein Grad. Es wäre sinnvoll gewesen, eine geodätische Vermessung durchzuführen, um eine höhere Genauigkeit zu erreichen. Bei den ersten Messungen war der Schnee recht hart, am Ende wurde er aufgrund der Sonneneinstrahlung und einer relativ hohen Lufttemperatur von 15°C ziemlich weich. So erhält man Daten für ein breites Spektrum von Schneeverhältnissen.

Der Schifahrer wurde mit einer 16 mm Locam Hochgeschwindigkeitskamera mit ca. 50 Bilder/s gefilmt. Der Bindungskopf wurde besonders markiert. Die tatsächliche räumlichen Koordinaten (Objektkoordinaten) x, y, z dieser Markierung wurden nach einer von Bopp und Krauss (1978) vorgeschlagenen Methode ermittelt. Die einzelnen Filmbilder wurden auf ein Digitalisiergerät projiziert, um

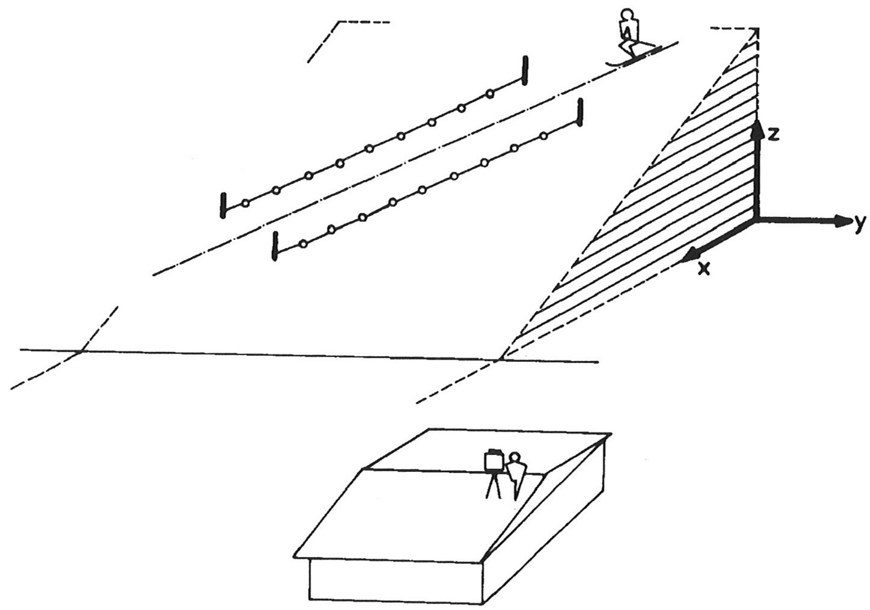

ABB. 1. Schematische Darstellung des Messaufbaus.

die Bildkoordinaten der Markierung und der vier nächstliegenden Passpunkte zu digitalisieren. Nach Bopp und Krauss lassen sich die Bildkoordinaten X, Y durch eine allgemeine affin-lineare Transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aus den Objektkoordinaten x, y, z ermitteln ('direct linear transformation'):

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}}{b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + 1} \\
Y &= \frac{b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}}{b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z + 1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Die Objektkoordinaten sind durch die Gleichung der Ebene (3) eingeschränkt. Durch Einsetzen der Ebenengleichung und Wahl neuer Koeffizienten c_{ij} erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
xc_{11} + yc_{12} + c_{13} - Xxc_{31} - Xyc_{32} &= X \\
xc_{21} + yc_{22} + c_{23} - Yxc_{31} - Yyc_{32} &= Y.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Aus diesem Gleichungssystem können die 8 Parameter c_{ij} der affin-linearen Transformation berechnet werden.

Um x, y aus den zugehörigen Bildkoordinaten X, Y zu bestimmen, schreibt man (7) in der Form

$$
\begin{pmatrix} Xc_{31} - c_{11} & Xc_{32} - c_{12} \\ Yc_{31} - c_{21} & Yc_{32} - b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13} - X \\ c_{13} - X \end{pmatrix}.
\tag{8}
$$

Die dritte Koordinate z ergibt sich aus der Ebenengleichung (3).

Wir nehmen an, dass von einer Filmaufnahme von einer bestimmten Testfahrt m Bilder ausgewertet werden. Mit t_i bezeichnen wir die Zeit, bei der das i-te Bild aufgenommen wurde. Bei einer konstanten Laufgeschwindigkeit des Films gilt

$$t_i = (i-1)\Delta t, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Die Zeitdifferenz zwischen 2 Bildern erhält man aus

$$\Delta t = \frac{t_m - t_1}{m}. \tag{10}$$

Die Zeiten t_1 und t_m werden absolut mit Lichtblitzen gemessen.

Durch die Filmanalyse erhält man aus dem i-ten Filmbild Objektkoordinaten (x_i, y_i, z_i). Diese Koordinaten liegen wegen Messfehlern, Streckenunebenheiten und Differenzen zwischen tatsächlicher Fahrlinie und Soll-Fahrlinie nicht genau auf einer Geraden. Um dies zu erreichen, transformieren wir die x-Koordinate so, dass (4) eine Ebene durch den Ursprung wird. Dann drehen wir das Koordinatensystem in Richtung der y-Achse um den Winkel α. Damit erreichen wir, dass im neuen Koordinatensystem die z-Komponente 0 ist. Durch eine weitere Verschiebung und Drehung erreichen wir, dass im neuen Koordinatensystem der 1-te Punkt die Koordinaten $x'_1 = y'_1 = z'_1 = 0$ besitzt und der letzte Punkt auf der x'-Achse liegt: $y'_m = z'_m = 0$. Durch die Punkte (x'_i, y'_i), $i = 1, \ldots, m$ legen wir eine Ausgleichsgerade. Der Wert an der Stelle x'_i bezeichnen wir mit y''_i. Der von t_1 bis t_i zurückgelegte Weg $x_{s,i}$ ergibt sich aus

$$x_{s,i} = \sqrt{(x'_i - x'_1)^2 + (y''_i - y''_1)^2}. \tag{11}$$

Die oben beschriebenen Verschiebungen und Drehungen wurden durchgeführt, um ein Koordinatensystem zu erreichen, in dem die Messwerte ungefähr entlang der x'-Achse liegen. Somit werden die Messdaten fast orthogonal auf die Ausgleichsgerade projiziert.

3. Reibung zwischen Schi und Schnee

Die Reibung zwischen Schi und Schnee ist ein kompliziertes Phänomen, das bis jetzt nur teilweise geklärt ist. Gesichert scheint, dass die Reibung zwischen Schi und Schnee deshalb so gering ist, weil durch die Reibungswärme der Schnee an der Lauffläche schmilzt und ein dünner Wasserfilm entsteht (Bowden, Hughes 1939, Bowden 1953, 1955, 1964).

Gleitet ein fester Körper auf einer festen Unterlage, tritt eine Reibungskraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung auf, die sogenannte Gleitreibung. Diese Reibung ist nach Coulomb proportional zur Normalkraft N, d.h. derjenigen Kraft, mit der der Körper normal auf die Unterlage drückt:

$$F = \mu N. \tag{12}$$

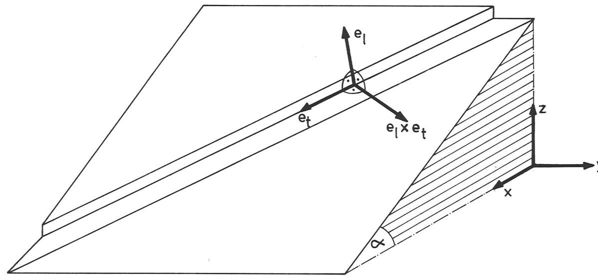

ABB. 2. Schrägfahrtsband.

Die Proportionalitätskonstante μ heißt Gleitreibungskoeffizient. Sie hängt nur von Material und Oberflächenbeschaffenheit der gleitenden Körpern ab und nicht von der Größe der Auflagefläche. Sie ist in geringem Maße geschwindigkeitsabhängig.

Bewegen sich zwei feste Körper auf einer dazwischenliegenden Flüssigkeitsschicht der Dicke d relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v, ergibt sich eine Reibungskraft

$$F = \frac{\eta A v}{d}. \tag{13}$$

Dabei stellt A die Kontaktfläche zwischen beiden Körpern dar. η heißt Koeffizient der inneren Reibung oder Zähigkeit der betreffenden Flüssigkeit. Man erklärt sich diese Reibungskraft dadurch, dass die Flüssigkeit an den beiden festen Körper haftet. Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen diesen haftenden Flüssigkeitsschichten baut sich auf Grund der Zähigkeit der Flüssigkeit linear ab.

Zur Diskussion der Reibung bei der Hangschrägfahrt nehmen wir vorerst an, dass der Schi ein starres Brett mit rechteckiger, ebener Grundfläche darstellt. Bei einer geraden Fahrt in Längsrichtung des Schis verhindert der Schifahrer durch Kanten ein seitliches Abrutschen. Dabei wird der Schnee durch die Schaufel komprimiert und verdrängt, sodass der Schi auf einem schmalen, ebenen Band dahinfährt (Hatze 1966). Die Breite dieses Bandes hängt von der Schneehärte und dem Gewicht des Schifahrers ab.

Die Ebene, die durch dieses Band definiert ist, ist quer zur Bewegungsrichtung ungefähr horizontal. Eine seitliche Neigung in Richtung vom Hang würde zu einem seitlichen Abrutschen führen, bei einer Neigung in Richtung zum Hang würde auch die Seitenfläche des Schis einen Druck auf den Schnee ausüben. Die Situation ist in Abb. 2 illustriert. $\mathbf{e}_t$ ist ein Einheitsvektor tangential zur Fahrtrichtung. Der Einheitsvektor $\mathbf{e}_l$ liegt in der Ebene, die durch die Fahrtrichtung $\mathbf{e}_t$ und die z-Richtung $\mathbf{e}_z$ festgelegt ist, und steht senkrecht auf $\mathbf{e}_t$.

In einer Ebene senkrecht auf die Fahrtrichtung ist die Steigung der schiefen Ebene (4) durch den Winkel ϕ gegeben. Den Winkel zwischen der Spur der

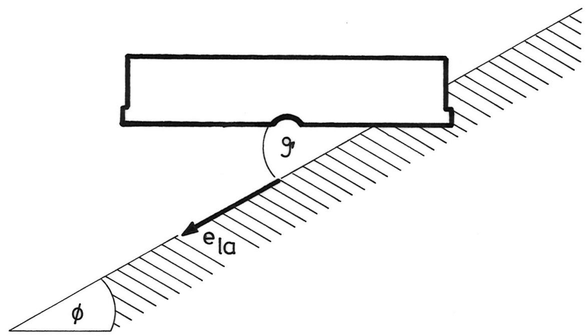

ABB. 3. Kantwinkel θ.

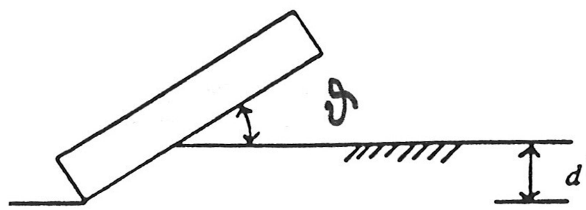

ABB. 4. Seitliches Abrutschen.

schiefen Ebene (4) und der Spur des Bandes nennen wir Kantwinkel θ. $\mathbf{e}_{la}$ ist ein Einheitsvektor in lateraler Richtung.

Bei einer Fahrt quer zur Längsseite des Schis (seitliches Abrutschen) wird Schnee abgeschert. Von Lieu, Mote (1984) stammt eine empirische Untersuchung über die Kräfte, die beim seitlichen Abrutschen auf Eis entstehen. Lieu, Mote (1985) und Renshaw, Mote (1991) geben eine daraus hergeleitete empirische Formel für Schnee an. In Abb. 4 wird die Situation verdeutlicht. Die Kraft F ist immer senkrecht auf der Grundfläche des Schis. Die Größe hängt ab von der Eindringtiefe d, dem Kantwinkel θ und einem Skalierungsfaktor K_f, der die Kraft, die bei der Unterlage Eis entsteht, auf die Verhältnisse reduziert, wenn die Unterlage aus Schnee besteht.

$$F_{Eis} = \left(\frac{16120}{\sin^{3.7}\theta} - 15510\right)(39.37d)^{-0.37\theta+0.7} \quad [\,Nm^{-1}\,]. \tag{14}$$
$$F = K_f K_d F_{Eis}$$

K_f ist typischerweise 0.02. Für weicheren Schnee ist ein kleinerer Wert zu wählen, für härteren Schnee ein größerer. K_d ist ein Glättungsfaktor. Für unsere Verhältnisse gilt $K_d = 1$, da die Eindringtiefe immer größer als 2 mm ist.

Eine weitere Untersuchung stammt von Brown, Outwater (1989). Sie basiert auf einer Arbeit von Merchant (1945) über den Schervorgang bei Metallen. Für Schervorgänge bei höherer Geschwindigkeit könnte auch die Arbeit von Yosida (1980) über die Bewegung des Schnees, der von einem Schneepflug weggeschoben wird, interessant sein. Die Studie wurde für den Hochgeschwindigkeitszug Shinkansen durchgeführt. Die beobachteten Effekte hängen stark davon ab, ob eine bestimmte kritische Geschwindigkeit (die Schallgeschwindigkeit von Schnee, einige 10 m/s) überschritten wird.

Weiters sei angemerkt, dass die beim seitlichen Abrutschen entstehenden Kräfte deutlich höher sind als die bei Gleitreibung oder Flüssigkeitsreibung - sie werden in der Praxis beim Abschwingen zum Bremsen verwendet.

In der Realität stellt der Schi kein starres Brett mit rechteckiger Grundfläche dar. Der Schi ist tailliert, d.h. er ist in der Mitte schmäler als an Schaufel oder Ende. Die Längsseiten des Schis können als Kreisbögen mit einem Radius von ca. 4-6 m approximiert werden. Der Schi ist elastisch. Er besitzt eine gewisse Vorspannung. Der Verlauf von Biegesteifigkeit und Torsionssteifigkeit stellt ein wesentliches Qualitätsmerkmal für den Schi dar. Die Verformbarkeit des Schis wird von Ohnishi (1963), Aichner (1978), Lieu, Mote (1985), Renshaw, Mote (1991) untersucht.

Bei einer geraden Fahrt in Richtung der Hangfalllinie entstehen durch die Taillierung des Schis an Schaufel und Ende Scherkräfte, da die Bewegungsrichtung nicht mehr tangential zu den Schikanten verläuft. Diese Scherkräfte sind zur Führung des Schis wesentlich. Bei einer geraden Hangschrägfahrt mit einem realen Schi wirken diese Kräfte nur auf einer Seite. Dadurch tendiert der Schi dazu, sich zu drehen.

Wegen der bei einer geraden Schrägfahrt auftretenden Scherkräfte ist die Reibung auf einer geraden Linie nicht minimal. Um die Scherkräfte zu minimieren, muss man versuchen, 'geschnitten' zu fahren, das heißt so, dass die Bahn in jedem Punkt der belasteten Kante möglichst tangential zur Kantenrichtung ist. Wir nehmen an, dass der Schi so belastet ist, dass die Grundfläche des Schis eben ist. Dann ergibt sich für die Bahn mit minimalen Scherkräften diejenige Ellipse, die als Schnitt zwischen einem Kreiszylinder mit gleichem Radius wie bei der Schitaillierung und der schiefen Ebene, auf der sich der Schifahrer bewegt, gegeben ist.

Eine quantitative Behandlung der einzelnen Reibungsterme geht weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. Da aber für die Bewegungsgleichung quantitative Angaben nötig sind, approximieren wir die Reibung durch einen konstanten Term und einen geschwindigkeitsproportionalen Term, die beide in negativer Bewegungsrichtung wirken. Für den konstanten Term verwenden wir (12) und den Ausdruck 'Gleitreibung'. Für den geschwindigkeitsproportionalen Term können wir (13) nicht verwenden, da weder die Kontaktfläche noch die Dicke des Wasserfilms bekannt sind. Wir setzen deshalb für den geschwindigkeitsproportionalen Reibungsanteil F

$$F = cv. \tag{15}$$

Ein allfälliger Term, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist, würde zu einem geänderten Wert für die im nächsten Kapitel diskutierte schädliche Fläche führen.

4. Luftwiderstand

5. Bewegungsgleichung

Für unsere Untersuchungen kann das Schifahrer-Schi-System durch einen Massenpunkt ersetzt werden. Die entsprechende Bewegungsgleichung für Schussfahrt in Richtung der Hangfallinie wurde von mehreren Autoren untersucht: Volkov, Remizov, Chirkovets (1971), Remizov (1974, 1980), Hatze (1982), Glenne, Von Allmen (1982), Townend (1984), Luethi, Denoth (1987), Nachbauer, Kaps (1991). Die bei der Hangschrägfahrt wirkenden Kräfte wurden von Hatze (1966) diskutiert. Wir verweisen insbesondere auf das Buch von Howe (1983) und verwenden nach Möglichkeit seine Notation. In jüngster Zeit wurde das Schifahrer-Schi-System mehrfach als Mehrkörpersystem modelliert: Fetz, Müller (1985), Schattner, Hauser, Asang (1985), Hasegawa, Asaoka, Miyazaki (1987), Hasegawa, Shimizu, Asada, Hashimoto (1990). Dies erscheint für uns erst sinnvoll, wenn die erzielten Ergebnisse so genau sind, dass auch Effekte wie Eigenbewegung des Schifahrers, elastische Eigenschaften des Schis und Luftwiderstand bzw. Auftrieb von einzelnen Körperteilen untersucht werden können.

Obwohl die Bewegungsgleichung für Schuss fahrt und Hangschrägfahrt bekannt ist, werden sie im folgenden nochmals hergeleitet, und zwar in einer Form, die für eine beliebige Bahnkurve des Schifahrers auf einer beliebigen Fläche gültig ist, solange der Schifahrer nicht abhebt. Etwas präziser nehmen wir an, dass die Bahn des Schiläufers auf der Fläche (2) durch eine weitere Bedingung $g_2(x, y, z) = 0$ festgelegt ist. Zusammen erhalten wir also die Zwangsbedingungen

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - h(x, y) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = 0. \tag{16}$$

Wir bezeichnen mit G die Matrix der partiellen Ableitungen von g. Die i-te Spalte von G^T ist der Gradient der i-ten Komponente von g und steht daher auf der dieser Zwangsbedingung entsprechenden Fläche senkrecht. Wir nehmen weiters an, dass die Zeilen von G linear unabhängig sind, das heißt, der Rang von G ist maximal.

Im Falle der Hangschrägfahrt ist (2) durch die Gleichung der Ebene (3) gegeben. Als g_2 könnte z.B. die Gleichung jeder Ebene verwendet werden, deren

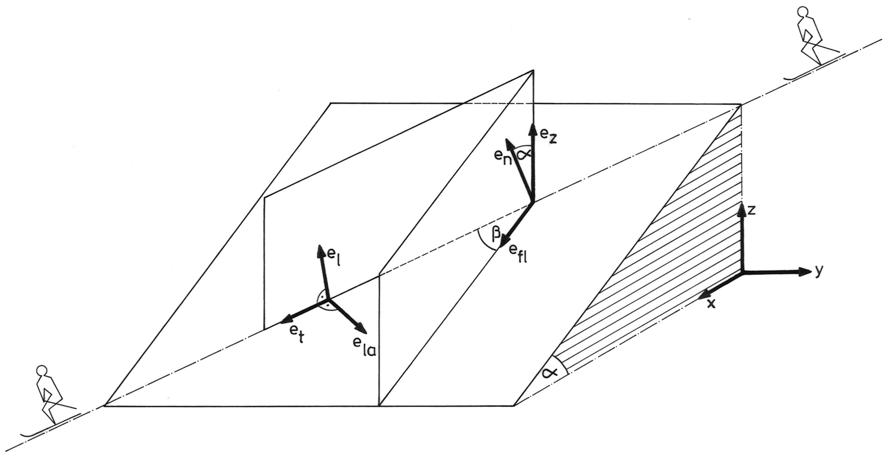

ABB. 5. Einheitsvektoren und Winkel.

Schnitt mit (3) die Bahn des Schiläufers ergibt. Wir wählen für g_2 die Projektion der Bahn auf die xy-Ebene. Dann ist g_2 von z unabhängig.

Im reibungsfreien Fall wirkt auf den Schifahrer nur die Schwerkraft

$$\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_z. \tag{17}$$

Wir zerlegen die Schwerkraft in drei Komponenten, die senkrecht aufeinander stehen. Die Komponente von $\mathbf{F}_g$, die senkrecht zur Ebene (3) ist, bezeichnen wir als Normalkraft $\mathbf{F}_n$. Mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_n$ in Richtung der Normalen auf (3) gilt:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_n = (-\sin\alpha, 0, \cos\alpha)^T \\ \mathbf{F}_n =< \mathbf{F}_g, \mathbf{e}_n > \mathbf{e}_n = -mg\cos\alpha\,\mathbf{e}_n. \end{gathered} \tag{18}$$

Bezeichnen wir mit $\mathbf{e}_{fl}$ den Einheitsvektor in Richtung der Falllinie, so gilt für die orthogonale Projektion P von $\mathbf{F}_g$ auf die Ebene (3):

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_{fl} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)^T \\ P\mathbf{F}_g =< \mathbf{F}_g, \mathbf{e}_{fl} > \mathbf{e}_{fl} = -mg\sin\alpha\,\mathbf{e}_{fl}. \end{gathered} \tag{19}$$

Somit ist die Komponente von $\mathbf{F}_g$ in Bewegungsrichtung, oder, anders ausgedrückt, die Tangentialkomponente von $\mathbf{F}_g$, gegeben durch

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_t = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\beta, \sin\alpha\cos\beta)^T \\ \mathbf{F}_t =< \mathbf{F}_g, \mathbf{e}_t > \mathbf{e}_t = -mg\sin\alpha\cos\beta\,\mathbf{e}_t. \end{gathered} \tag{20}$$

Dabei erhält man den Einheitsvektor in tangentialer Richtung $\mathbf{e}_t$ durch Drehung von $\mathbf{e}_{fl}$ um den Winkel β mit der Drehachse $\mathbf{e}_n$. Für die dazu senkrechte Komponente, die Lateralkomponente von $\mathbf{F}_g$, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{la} &= \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_t = (-\cos\alpha\sin\beta, \cos\beta, -\sin\alpha\sin\beta)^T \\ \mathbf{F}_{la} &= mg\sin\alpha\sin\beta\,\mathbf{e}_{la}, \end{aligned} \tag{21}$$

wobei $\mathbf{e}_{la}$ den Einheitsvektor in lateraler Richtung darstellt (Abb. 3). Im Gegensatz zur Notation von Howe (1983) braucht $\mathbf{e}_{la}$ nicht notwendig nach unten weisen, z.B. für negatives β.

Um den Schifahrer auf seiner Bahn zu halten, sind Zwangskräfte notwendig. In unserem Falle müssen die Zwangskräfte die Normalkraft und die Lateralkraft kompensieren. Es gilt also:

$$\mathbf{F}_r = -\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{la}. \tag{22}$$

Die Reaktionskraft $-\mathbf{F}_n$, die wir, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, ebenfalls als Normalkraft bezeichnen, hält den Schifahrer auf der Ebene (3), die Reaktionskraft $-\mathbf{F}_{la}$, die wir analog zu oben, ebenfalls als Lateralkraft bezeichnen, verhindert ein seitliches Abrutschen. $\mathbf{F}_n$ ist eine Linearkombination aus der ersten Spalte von G^T. Die erste Komponente von g in (16) entspricht der Ebene (3). Der Gradient von g_1 und $\mathbf{e}_n$ stehen beide senkrecht auf dieser Ebene. $\mathbf{F}_{la}$ ist eine Linearkombination aus beiden Spalten von G^T. Der Gradient g_2 steht wie $\mathbf{e}_{la}$ senkrecht auf die Bewegungsrichtung $\mathbf{e}_t$. Er liegt allerdings nicht, wie $\mathbf{e}_{la}$, in der Ebene (3), sondern ist parallel zur (x,y)-Ebene. Somit lassen sich die Reaktionskräfte (22) als Linearkombinationen der Spalten von G^T darstellen:

$$\mathbf{F}_r = G^T\boldsymbol{\lambda}. \tag{23}$$

Die durch die Interaktion zwischen Luft und Schifahrer verursachte Kraft $\mathbf{F}_w$ zerlegen wir in die Luftreibung $\mathbf{F}_d$, die entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung wirkt, und den Auftrieb $\mathbf{F}_l$, der in der durch die Bahn und $\mathbf{e}_z$ definierten Ebene liegt und senkrecht auf $\mathbf{e}_t$ nach oben weist. Die Komponente von $\mathbf{F}_w$, die senkrecht auf dieser Ebene liegt, vernachlässigen wir, da uns keine Angaben über ihre Größe zugänglich sind. Bei der Schussfahrt in der Hangfallinie ist diese Komponente aus Symmetriegründen gleich null. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_l &= \frac{(-\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta, -\sin\alpha\sin\beta\cos\beta, 1-\sin^2\alpha\cos^2\beta)^T}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\beta}} \\ \mathbf{F}_d &=< \mathbf{F}_w, \mathbf{e}_t > \mathbf{e}_t = -\frac{1}{2}c_d A\rho v^2\mathbf{e}_t; \\ \mathbf{F}_l &=< \mathbf{F}_w, \mathbf{e}_l > \mathbf{e}_l = \frac{1}{2}c_l A\rho v^2\mathbf{e}_l. \end{aligned} \tag{24}$$

Zur Berechnung des Widerstandes zwischen Schi und Schnee - wir bezeichnen ihn kurz mit Gleitreibung - gehen wir von Formel (12) aus. Eigentlich müsste man für die Normalkraft die Projektion von $\mathbf{F}_g - \mathbf{F}_l$ auf die Normale der Fläche einsetzen, auf der der Schifahrer fährt. Idealisiert man den Schi durch ein starres Brett, ist diese Fläche das schon in Kapitel 3 beschriebene ebene Band. In diese Normale geht der Kantwinkel ein, der nicht genau gemessen werden kann. Da das Band quer zur Fahrtrichtung ungefähr horizontal ist, könnte man für N die Projektion von $\mathbf{F}_g - \mathbf{F}_l$ auf $\mathbf{e}_l$ einsetzen. Dann hängt N von β ab, da gilt:

$$< \mathbf{F}_g, \mathbf{e}_l >= -mg\sqrt{1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta}.$$

Somit kann man aus einem größerem μ nicht notwendig auf größere Gleitreibung schließen. Um solche Komplikationen zu vermeiden, setzen wir für N die Projektion von $\mathbf{F}_g - \mathbf{F}_l$ auf $\mathbf{e}_n$ die Normale der Ebene (3) an. Somit ergibt sich:

$$\mathbf{F}_f = \mu N\mathbf{e}_t, \qquad N =< \mathbf{F}_g - \mathbf{F}_l, \mathbf{e}_n >= (-mg + |\mathbf{F}_l|)\cos\alpha. \tag{25}$$

Bei einer Fahrt auf einer schiefen Ebene ist N negativ und $\mathbf{F}_f$ wirkt bremsend. Bei einer Fahrt über Buckel könnte N aufgrund der Fliehkräfte positiv werden. Dann würde der Schifahrer abheben und die Bewegungsgleichung ist nicht mehr gültig. Da der Schifahrer versuchen wird, ein Abheben durch Beugen bzw. Strecken zu verhindern, muss das Schifahrer-Schi-System schon vor einem größeren Buckel durch ein Mehrkörpersystem beschrieben werden (Fetz, Müller 1985).

Weiters sei darauf verwiesen, dass in der Gleitreibung der Term $\mathbf{F}_n = < \mathbf{F}_g, \mathbf{e}_n >$ auftritt. Dies stellt eine Reaktionskraft dar. Die Gleitreibung hängt also von den Reaktionskräften (23) ab. Dies könnte bei großen Werten von μ zu Komplikationen mit dem Algorithmus zur Lösung von Algebrodifferentialgleichungen führen.

Fassen wir die bisherigen Überlegungen kurz zusammen: In unserem Modell ist das Schifahrer-Schi-System durch die Gleichung (1) und die Nebenbedingungen (16) beschrieben. In (5) sind die Kräfte $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{F}_w = \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_l$, $\mathbf{F}_f$ von (17), (24) und (25) einzusetzen. Man erhält folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= -mg\mathbf{e}_z - \frac{1}{2}c_d A\rho v^2\mathbf{e}_t + \frac{1}{2}c_l A\rho v^2\mathbf{e}_l + \mu(-mg + |\mathbf{F}_l|)\cos\alpha\,\mathbf{e}_t + \mathbf{F}_r \\ 0 &= \begin{pmatrix} -x\sin\alpha + z\cos\alpha - D \\ x\sin\beta - y\cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26}$$

Dies stellt eine Algebrodifferentialgleichung vom Index 3 dar (Hairer, Lubich, Roche 1989). Diese Algebrodifferentialgleichung könnte im Prinzip mit den Extrapolationsmethoden von Lubich (1990) gelöst werden. Wir verwenden jedoch, dass die Reaktionskräfte senkrecht auf $\mathbf{e}_t$ stehen: $< \mathbf{F}_r, \mathbf{e}_t >= 0$. Dann ergibt sich durch innere Multiplikation der Bewegungsgleichung (26) mit $\mathbf{e}_t$ für $x_s := \; < \mathbf{x}, \mathbf{e}_t >$ folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$m\ddot{x}_s = -mg(-\sin\alpha\cos\beta - \mu\cos\alpha) - \frac{1}{2}c_d A\rho\dot{x}_s^2 + \mu\frac{1}{2}c_l A\rho\dot{x}_s^2\cos\alpha. \tag{27}$$

Da α und β für eine Hangschrägfahrt konstant sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s &= a + b\dot{x}_s^2 \\ a &= -g \sin\alpha \cos\beta - \mu g \cos\alpha \\ b &= -\frac{1}{2m}\rho A(c_d - \mu c_l \cos\alpha). \end{aligned} \tag{28}$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir:

$$x_s(0) = x_0, \qquad \dot{x}_s(0) = v_0. \tag{29}$$

Als Anfangsposition wählen wir üblicherweise $x_0 = 0$, die Anfangsgeschwindigkeit ist variabel, da der Testfahrer vor der Einfahrt in die Teststrecke aus verschiedenen Höhen startete. Deshalb wird im folgenden auch versucht, die Anfangsgeschwindigkeit zu bestimmen.

6. Bestimmung der freien Parameter

Wir nehmen an, dass für eine bestimmte Hangschrägfahrt nach dem im Kapitel 2 beschriebenen Verfahren Messwerte $x_{s,i}$ für den Ort des Bindungskopfes zur Zeit t_i, $i = 1, \ldots, m$ bekannt sind. Wir wollen die Parameter a, b und die Anfangsgeschwindigkeit v_0, von (28) so bestimmen, dass die Summe der Fehlerquadrate

$$\chi^2(a, b, v_0) = \sum_{i=1}^{m} (x_{s,i} - x(t_i))^2 \tag{30}$$

minimal wird. Die exakte Lösung der Differentialgleichung (28) x_s hängt von den Parametern a, b und v_0 ab. Durch eine einfache Transformation (Hairer, Nørsett, Wanner 1987) können auch Anfangswerte als Parameter aufgefasst werden. Weiters kann die Differentialgleichung 2-ter Ordnung durch Einführen einer Hilfsvariablen $v_s = \dot{x}_s$ in ein System 1-ter Ordnung umgewandelt werden.

Wir untersuchen etwas allgemeiner als (28) Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{p}), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{31}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{p}$ einen Vektor von Parametern

$$\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T.$$

Zur Bestimmung der Parameter lösen wir das folgende nichtlineare Ausgleichsproblem (ohne Nebenbedingungen):
Gegeben sind die Meßwerte $\mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, m$ für die Lösung von (32) an der Stelle t_i. Gesucht sind jene Parameterwerte $\mathbf{p}$, für die

$$\chi^2(p) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}(t_i)\|^2 \tag{32}$$

ein (absolutes) Minimum annimmt.

Zur Lösung dieses Problems verwenden wir Programme aus der NAG-Bibliothek, die in der Nähe der Lösung ein Gauß-Newton Verfahren anwenden. Das Programm E04FCF, das keine Ableitungen benötigt, liefert keine befriedigenden Ergebnisse. Man erhält nur grobe Annäherungen an die Lösung, dann bricht der Code ab. Dies ist auch dann der Fall, wenn die Lösung von (28) nicht numerisch berechnet wird, sondern die analytische Lösung verwendet wird. Diese lautet:

(33)
$$x_s = \frac{v_\infty}{\Delta}\left(2\ln\frac{(v_\infty + v_0)e^{\Delta t} + v_\infty - v_0}{2v_\infty} - \Delta t\right) + x_0, \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{a}{-b}}, \quad \Delta = 2\sqrt{-ab}.$$

Wir verwenden deshalb den Code E04GDF. Dieser Code benötigt die ersten Ableitungen. Dazu berechnen wir die Variationsgleichungen (Hairer, Nørsett, Wanner 1987).

Aus physikalischen Überlegungen dürfen $c_d A$, die schädliche Fläche, und μ, der Gleitreibungskoeffizient, keine negativen Werte annehmen. Da der von uns verwendete Code keine Nebenbedingungen zulässt, setzen wir diese Größen als Quadrate an:

$$p_1^2 = c_d A \quad \text{und} \quad p_2^2 = \mu. \tag{34}$$

Wir schreiben im folgenden kurz s statt x_s und v stat $\dot{x}_s$. Damit ergibt sich für (27) bzw. (28) folgendes System von Differentialgleichungen 1-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{\rho}{2m} c_d A v^2 - \mu g \cos\alpha - g \sin\alpha \cos\beta \\ & s(0) = 0 \qquad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{35}$$

Um als Anfangswerte in allen Komponenten 0 zu erhalten, führen wir $w = v - v_0$ als abhängige Variable anstelle von v ein.

$$\begin{aligned} \dot{s} &= w + v_0 \\ \dot{w} &= -\frac{\rho}{2m} c_d A (w + v_0)^2 - \mu g \cos\alpha - g \sin\alpha \cos\beta \\ & s(0) = 0, \qquad w(0) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Mit den Parametern

$$p_1 = \sqrt{c_d A}, \qquad p_2 = \sqrt{\mu} \quad \text{und} \quad p_3 = v_0 \tag{37}$$

und den Variablen

$$\begin{array}{llll} y_1 = s & y_3 = \dfrac{\partial s}{\partial p_1} & y_5 = \dfrac{\partial s}{\partial p_2} & y_7 = \dfrac{\partial s}{\partial p_3} \\ y_2 = w & y_4 = \dfrac{\partial w}{\partial p_1} & y_6 = \dfrac{\partial w}{\partial p_2} & y_8 = \dfrac{\partial w}{\partial p_3} \end{array} \tag{38}$$

erhalten wir die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2 + p_3 \\
\dot{y}_2 &= -\frac{\rho}{2m}(y_2+p_3)^2 p_1^2 - g\cos\alpha\, p_2^2 - g\sin\alpha\cos\beta \\
\dot{y}_3 &= y_4 \\
\dot{y}_4 &= -\frac{\rho}{m}(y_2+p_3)y_4 p_1^2 - \frac{\rho}{m}(y_2+p_3)^2 p_1 \\
\dot{y}_5 &= y_6 \\
\dot{y}_6 &= -\frac{\rho}{m}(y_2+p_3)y_6 p_1^2 - 2g\cos\alpha\, p_2 \\
\dot{y}_7 &= y_8 + 1 \\
\dot{y}_8 &= -\frac{\rho}{m}(y_2+p_3)(y_8+1)p_1^2
\end{aligned} \tag{39}$$

mit den Anfangswerten

$$y_i(0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, 6. \tag{40}$$

7. Zuverlässigkeit der Parameter

Wir haben ein Modell des Schifahrers auf einer beliebigen Fläche entwickelt und dessen Lösung beschrieben. Durch Vergleich mit Messdaten konnten wir Parameter, wie Gleitreibung und schädliche Fläche zahlenmäßig bestimmen. Als nächstes stellt sich die Frage nach der stochastischen Zuverlässigkeit unserer Ergebnisse.

Die Parameter $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ sind so bestimmt, dass die Fehlerquadratsumme

$$\mathbf{u}^T\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \phi(x_i, \mathbf{p}))^2 \tag{41}$$

minimal wird. Hierbei ist der Fehler u_i die Differenz zwischen dem i-ten Messpunkt y_i, der aus den Filmdaten gewonnen wird, und dem aus der Modellfunktion ϕ berechneten Wert. Als Modellfunktion dient die Lösung der Differentialgleichung (31) bzw. (39), (40). Betrachtet man das allgemeine Schifahrer-Modell, so muss man als Modellfunktion die Lösung einer Algebrodifferentialgleichung nehmen.

In unserem Fall haben wir die 3 Parameter

$$\mathbf{p} = (\sqrt{c_d A}, \sqrt{\mu}, v_0). \tag{42}$$

Die Wurzeln in den einzelnen Komponenten bewirken, dass die physikalischen Parameter $c_d A$ und μ positive Werte annehmen.

Zur Angabe von Konfidenzintervallen für die Parameter bedienen wir uns der Regressionsanalyse. Wir gehen davon aus, dass die Messwerte $\mathbf{y}$ stochastisch unabhängige Störungen der wahren Messwerte sind. Genauer verlangen wir

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_w + \mathbf{u}. \tag{43}$$

$\mathbf{y}_w = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_w) = (\phi(x_i, \mathbf{p}_w))_i$ ist der Vektor der wahren Funktionswerte bei den wahren Parametern $\mathbf{p}_w$. $\mathbf{u}$ ist ein Zufallsvektor unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen mit Erwartung 0 und Varianz σ^2. Die Varianz σ^2 der einzelnen Zufallsgrößen u_i setzen wir als unbekannt, jedoch für alle Messwerte gleich, voraus. Somit gilt:

$$E(\mathbf{u}) = 0, \qquad Cov(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sigma^2 \mathbb{I}. \tag{44}$$

wo E der Erwartungswert und Cov die Kovarianzmatrix darstellt.

Die berechneten Parameter $\mathbf{p}$ wurden so bestimmt, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird:

$$\|\mathbf{y} - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\| \longrightarrow \min. \tag{45}$$

Hier bedeutet $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\phi(x_i, \mathbf{p}))_i$ und $\| \;\; \|$ die euklidische Norm. Man zerlegt $\mathbf{p}$ in seinen wahren Anteil $\mathbf{p}_w$ und eine Störung $\mathbf{q}$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_w + \mathbf{q} \tag{46}$$

und interessiert sich für die Verteilung dieser Störungen. Wir approximieren die Modellfunktion in der Nähe von $\mathbf{p}_w$ durch ihre Taylorreihe

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_w + \mathbf{q}) = \mathbf{y}_w + \mathbb{J}\mathbf{q} + O(\|\mathbf{q}\|^2) \\ \mathbf{y}_w = (\phi(x_i, \mathbf{p}_w))_i \qquad \text{und} \qquad \mathbb{J} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial p_j}(x_i, \mathbf{p}_w) \right)_{ij}. \end{gathered} \tag{47}$$

und ersetzen das Minimierungsproblem (45) durch

$$\chi^2(\mathbf{q}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_w - \mathbb{J}\mathbf{q}\| \longrightarrow \min. \tag{48}$$

Das Minimum tritt bei $\partial\chi^2/\partial\mathbf{q} = 0$ ein. Durch Differenzieren erhält man

$$\mathbb{J}^T(\mathbf{y} - \mathbf{y}_w - \mathbb{J}\mathbf{q}) = 0. \tag{49}$$

Da $\mathbb{J}^T\mathbb{J}$ positiv definit ist, ergibt sich mit (43), (46), (49) unter Beachtung von $\mathbf{y}_w = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{p}_w)$ leicht

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_w + (\mathbb{J}^T\mathbb{J})^{-1}\mathbb{J}^T\mathbf{u}. \tag{50}$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$E(\mathbf{p}) = \mathbf{p}_w \qquad \text{und} \qquad Cov(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sigma^2(\mathbb{J}^T\mathbb{J})^{-1} =: \sigma^2\mathbb{C}. \tag{51}$$

Unsere Vorgangsweise liefert einen erwartungstreuen Wert für die Parameter $\mathbf{p}$. Die Kovarianzmatrix $\sigma^2\mathbb{C}$ ist leicht berechenbar, da sie aus den Ableitungen der Modellfunktion $\boldsymbol{\phi}$ nach den Parametern $\mathbf{p}$ gebildet wird. Diese wurden, wie in

Kapitel 6 beschrieben, bei der Lösung des Ausgleichsproblemes mitberechnet. Zusammenfassend haben wir

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\sim \nu(\mathbf{p}_w, \sigma^2 \mathbb{C}) \\ p_i &\sim \nu(p_{i,w}, \sigma^2 c_{ii}). \end{aligned} \tag{52}$$

Um Konfidenzintervalle für die Parameter $\mathbf{p}$ angeben zu können, benötigen wir noch ein paar Hilfsgrößen. Für die Streuung σ der Messdaten hat man nach (44) den erwartungstreuen Schätzer

$$S^2 = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{m-n} \qquad \text{mit} \qquad E(S^2) = \sigma^2. \tag{53}$$

Ebenfalls aus (44) folgt, dass

$$\chi^2 = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{\sigma^2} \tag{54}$$

χ^2-verteilt mit $m-n$ Freiheitsgraden ist. Nach (52) bilden wir die standardnormalverteilte Zufallsgröße

$$N = \frac{p_i - p_{i,w}}{\sqrt{c_{ii}}\,\sigma}. \tag{55}$$

und daraus die Student-t verteilte Zufallsvariable

$$t = \frac{N}{\sqrt{\frac{\chi^2}{m-n}}} = \frac{p_i - p_{i,w}}{\sqrt{c_{ii}}\,S}. \tag{56}$$

mit $m-n$ Freiheitsgraden. Mit der letzten Zufallsvariable, die die unbekannte Streuung σ der Meßwerte nicht mehr enthält, geben wir Konfidenzintervalle für die Parameter an. Es sei dazu das $\beta-$Fraktil $t_{\beta,m-n}$ der Student-t Verteilung mit $m-n$ Freiheitsgraden definiert durch

$$P(t \le t_{\beta,m-n}) = \beta. \tag{57}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$P\left(t_{\beta/2,m-n} \le t = \frac{p_i - p_{i,w}}{S\sqrt{c_{ii}}} \le t_{1-\beta/2,m-n}\right) = 1 - \beta. \tag{58}$$

und wegen $t_{\alpha,k} = -t_{1-\alpha,k}$ durch Umformung

$$P\left(p_i - S\sqrt{c_{ii}}\,t_{1-\beta/2,m-n} \le p_{i,w} \le p_i + S\sqrt{c_{ii}}\,t_{1-\beta/2,m-n}\right) = 1 - \beta. \tag{59}$$

Man nennt

$$\left[\, p_i - S\sqrt{c_{ii}}\,t_{1-\beta/2,m-n},\; p_i + S\sqrt{c_{ii}}\,t_{1-\beta/2,m-n} \,\right]. \tag{60}$$

das Konfidenzintervall von $p_{i,w}$ zum Niveau β.

Mit Hilfe der Student-t Verteilung kann man leicht testen, ob ein Parameter p_i in (39) auftritt. Man kann so oft zu einfacheren Modellen übergehen. Man wähle dazu die Hypothese $p_i = 0$ und berechne die Prüfstatistik

$$t = \frac{p_i}{\sqrt{c_{ii}}\, S}. \tag{61}$$

Falls $|t| < t_{1-\beta,m-n}$ gilt, so behalte die Hypothese, ansonsten verwerfe diese.

8. Diskussion der Ergebnisse

Literatur

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York (1972)

[2] Aichner, N.: *Bodendruckverteilung und Formänderungswiderstand beim gleitenden Schi*. Dissertation an der Technischen Universität Graz (1978)

[3] Akkok, M., Ettles, C.M.McC., Calabrese, S.J.: *Parameters affecting the kinetic friction of snow*. Journal of Tribology 109, 552-561 (1987)

[4] Alten, H.: *Computersimulation eines Schisprunges*. Dissertation an der Technischen Universität Graz (1987)

[5] Ambach, W., Mayr, B.: *Ski gliding and water film*. Cold Regions Science and Technology 5, 59-65 (1981)

[6] Bopp, H., Krauss, H.: *Ein Orientierungs und Kalibrierungsverfahren für nichttopographische Anwendungen und Photogrammetrie*. AVN 5 182-188 (1978)

[7] Bowden, F.P.: *Friction between ski and snow*. New Scientist 376, 275-279 (1964)

[8] Bowden, F.P.: *Friction on snow and ice and the development of some fast-running skis*. Nature 176, 946-947 (1955)

[9] Bowden, F.P.: *Friction on Snow and Ice*. Proceedings of the Royal Society, London, Ser. A (1953)

[10] Bowden, F.P., Hughes, T.P.: *The mechanism of sliding on ice and snow*. Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A (1939)

[11] Brown, C.A., Outwater, J.O.: *On the Skiability of Snow*. Skiing Trauma and Safety: Seventh International Symposium, ASTM STP 1022, R.J. Johnson, C.D. Mote, Binet (Eds.), Philadelphia 329-336 (1989)

[12] Brownlee K.A.: *Statistical Theory and Methology in Science and Engineering*. John Wiley & Sons (1965)

[13] Colbeck, S.C.: *The kinetic friction of snow*. Journal of Glaciology 34, 116 78-86 (1988)

[14] Colbeck, S.C., Warren, G.C.: *The thermal response of downhill skis*. Journal of Glaciology 37, 126 228-235 (1991)

[15] Constantinides, A.: *Applied Numerical Methods with Personal Computers*. McGraw Hill (1988)

[16] Danepa, J., Feltner, M.E.: *Effects of Wind and Altitude on the Times of 100-Meter Sprint Races*. International Journal of Sport Biomechanics 3, 6-39 (1987)

[17] Deuflhard, P.: *A Relaxation Strategy for the Modified Newton Method*. Springer Lecture Notes in Mathematics 477, 59-73 (1975)

[18] Deuflhard, P.: *A Modified Newton Method for the Solution of Ill-conditioned Systems of Nonlinear Equations with Application to Multiple Shooting*. Numerische Mathematik 22, 289-315 (1974)

[19] Dongarra, J.J., Moler, C.B., Bunch, J.R., Stewart, G.,W.: *Linpack Users' Guide*. SIAM, Philadelphia (1979)

[20] Evans, D.C.B, Nye, J.F., Cheeseman, K.J.: *The kinetic friction of ice*. Proceedings of the Royal Society of London A347, 493-512 (1976)

[21] Fetz, F., Müller, E.: *Abstimmung sportlicher Belastungen verschiedener Schifahrtechniken als Beitrag zur Unfallverhütung und Verhütung von Schäden des Stützapparates*. Unveröffentlichtes Forschungsprojekt für Bundesministerium für Gesundheit und Umweltschutz, Innsbruck (1985)

[22] Fetz, F., Müller, E. (Hg.): *Biomechanik der Sportarten. Band 2: Biomechanik des alpinen Skilaufs*. Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart (1991)

[23] Gill, Ph.E., Murray, W.: *Algorithms for the Solution of the Nonlinear Least-Squares Problem*. SIAM Journal of Numerical Analysis 15, 5, 977-992 (1978)

[24] Glenne, B., von Allmen, B.: *Basic Mechanics of Alpine Skiing*. Ski Trauma and Skiing Safety III, Johnson et al. (Eds.), München 50-57 (1982)

[25] Gorlin, S.M., Maseev, M.M., Zyrjanow, W.A., Remizov, L.L.: *Investigation of frontal air resistance of skiers*. Teorija i praktika fizicheskoj kultury 2, 65-66 (1972)

[26] Gros, H.J.: *Basic mechanics and aerodynamics applied to skiing*. Science in Skiing, Skating, and Hockey: Proceedings of the International Congress of Sport Sciences, T. Terauds and H. Gros (Eds.), 9-21. Calif. Academic Publishers, San Diego (1979)

[27] Habel, B.: *Über die Bestimmung von Luftwiderstand und Gleitreibung beim Skilauf*. Europa-Sport 20, 7 950-955 (1968)

[28] Hairer, E., Lubich, Ch., Roche, M.: *The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta Methods*. Springer Lecture Notes in Mathematics 1409 (1989)

[29] Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 8 (1987)

[30] Hairer, E., Wanner, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 14 (1991)

[31] Hämäläinen, T., Spring, E.: *The influence of snow hardness on ski friction*. Commentationes physico-mathematicae 76 (1986)

[32] Hasegawa, K., Asaoka, A., Miyazaki, T.: *A Dynamical Simulation Model of Skiing Turn, Monoski Model*. Memoirs of the Faculty of Engineering Fukui University, Vol. 35, 1, 133-149 (1987)

[33] Hasegawa, K., Shimizu, Sh., Asada, K., Hashimoto, K.: *The human posture appropriate to stable turning around a horizontal circular track*. Jpn. J. Hum. Posture 10, 1, 55-65 (1990)

[34] Hatze, H.: *Die biomechanische und physikalische Grundlegung der Hangschrägfahrtstellung im Schilauf*. Leibesübungen und Leibeserziehung 20, 9, 1-3 (1966)

[35] Hatze, H.: *Mechanische Prinzipien von Bewegungsabläufen*. Skriptum nach der gleichnamigen Vorlesung, Institut für Sportwissenschaften der Universität Wien (1982)

[36] Haug, E.J.: *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*. Vol. I: Basic Methods, Allyn and Bacon, Boston (1989)

[37] Hoerner, S.F.: *Fluid-Dynamic Drag, Practical Information on Aerodynamic Drag and Hydrodynamic Resistance*, published by the author, New York (1965)

[38] Howe, J.: *Skiing Mechanics*. Poudre Press, Laporte, Colorado (1983)

[39] Kneubühl, F.K.: *Repetitorium der Physik*. B.G. Teubner (1982)

[40] Kuroiwa, D.: *The kinetic friction on snow and ice*. Journal of Glaciology 19, 81, 141-152 (1977)

[41] Lanczos, C.: *A Precision Approximation of the Gamma Function*. SIAM Journal of Numerical Analysis B, 1, 86-96 (1964)

[42] Lang, T.E., Dent, J.D.: *Review of research on snow pertaining to surface friction, surface resistance, and surface flow*. Canadian Workshop on the Properties of Snow, Snowbird, Utah (1981)

[43] Lawson, C.L., Hanson, R.J., Kincaid, D.R., Krogh, F.T.: *Basic Linear Algebra Subprograms for Fortran Usage*, ACM Transactions on Mathematical Software 5, 3, 308-323 (1979)

[44] Leino, M.A.H., Spring, E.: *Determination of the coefficient of kinetic friction between ski and snow from the gliding velocity of a skier*. Report Series in Geophysics 19, 1-11 (1984)

[45] Leino, M.A.H., Spring, E., Suominen, H.: *Methods for the simultaneous determination of air resistance to a skier and the coefficient of friction of his skis on the snow*. Wear 86, 101-104 (1983)

[46] Lethovaara, A.: *Friction between Plastics and Ice*. Tribology 4, 3, 14-26 (1895)

[47] Lieu, D.K., Mote, C.D.: *Experiments in the machining of ice at negative rake angles*. Journal of Glaciology 30, 104, 77-81 (1984)

[48] Lieu, D.K., Mote, C.D.: *Mechanics of the Turning Snow Ski*. Skiing Trauma and Safety: Fifth International Symposium, ASTM STP 860, R.J. Johnson, C.D. Mote (Eds.), Philadelphia 117-148 (1985)

[49] Lubich, Ch.: *Extrapolation integrators for constrained multibody systems*. Internal report, Institut für Mathematik und Geometrie, Universität Innsbruck (1990)

[50] Lubich, Ch.: *Extrapolation integrators for constrained multibody systems*. Impact of Computing in Science and Engineering 3, 213-234 (1990)

[51] Luethi, M., Denoth, J.: *The Influence of Aerodynamic and Anthropometric Factors on Speed in Skiing*. International Journal of Sport Biomechanics 3, 345-352 (1987)

[52] Maronski, R.: *On Optimal Running Downhill on Skis*. Journal of Biomechanics 23, 435-439 (1990)

[53] Maronski, R.: *Control Systems Approach to a Ski-Turn Analysis*. Journal of Biomechanics 6, 267-279 (1973)

[54] Marzan, C.T., Karara, H.M.: *A computer program for direct linear transformation solution of the colinearity condition, and some applications of it*. Proceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetric Systems, American Society of Photogrammetry, Falls Church, Virginia 420-476 (1975)

[55] Mayr, B.: *Ein Beitrag zur Physik des Schigleitens: Elektronische Messung des Wasserfilms beim Gleitvorgang*. Dissertation an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Innsbruck (1979)

[56] Merchant, M.E.: *Mechanics of the Metal Cutting Process. II. Plasticity Conditions in Orthogonal Cutting*. Journal of Applied Physics 16, 318-324 (1945)

[57] Moler, C.B.: *Algorithm 423. Linear Equation Solver*. Communications of the ACM 15, 274 (1972)

[58] Moore, D.F.: *Principles and Applications of Tribology*. Pergamon Press, Oxford, England (1976)

[59] Müller, E.: *Biomechanische Analyse alpiner Schilauftechniken*. Innsbruck (1987)

[60] Nachbauer, W., Kaps, P.: *Fahrzeitbestimmende Faktoren beim Schussfahren*. Biomechanik des alpinen Skilaufs, F. Fetz und E. Müller (Hg.), Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart 101-111 (1991)

[61] *NAG Fortran Library Manual*. Mark 13, NAG Ltd. (1988)

[62] Ohnishi, T.: *Die physikalischen Eigenschaften des Schibretts*. Japanese Journal of Applied Physics 3, 218-228 (1964)

[63] Outwater, J.O.: *On the friction of skis*. Medicine and Science in Sports 2, 4, 231-234 (1970)

[64] Perla, R.I., Glenne, B.: *Skiing*. Handbook of Snow, D.M. Grey and D.H. Male (Eds.), Pergamon Press, Toronto (1981)

[65] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press (1987)

[66] Quigley, B.M., Chaffin, B.: *A computerized biomechanical model applied to analysis of skiing*. Medicine and Science in Sports 3, 2, 89-96 (1971)

[67] Raine, A.E.: *Aerodynamics of Skiing*. Science Journal 21, 16-30 (1970)

[68] Remizov, L.P.: *The optimal tactics in downhill course*. Teorija i praktika fizicheskoj kultury, 2, 16-19 (1974)

[69] Remizov, L.P.: *Optimal Running on Skis in Downhill*. Journal of Biomechanics 13, 941-945 (1980)

[70] Renshaw, A.A., Mote, C.D.: *A Model for the Turning Snow Ski*. Skiing Trauma and Safety: Eighth International Symposium, ASTM STP 1104, C.D. Mote and R.J. Johnson (Eds.), Philadelphia 217-238 (1991)

[71] Sakata, T.: *Consideration on Mechanical Properties of Skies*. Skiing Trauma and Safety: Sixth International Symposium, ASTM STP 938, C.D. Mote and R.J. Johnson (Eds.), Philadelphia 86-99 (1987)

[72] Savolainen, S.: *Theoretical Drag Analysis of a Skier in the Downhill Speed Race*. International Journal of Sport Biomechanics 5, 26-39 (1989)

[73] Schattner, R., Hauser, W., Asang, E.: *Basic Mechanics of Boot/Skier Interaction*. Skiing Trauma and Safety: Fifth International Symposium, ASTM STP 860, R.J. Johnson and C.D. Mote (Eds.), Philadelphia 151-158 (1985)

[74] Schiehlen, W.: *Multibody Systems Handbook*. Springer (1990)

[75] Schiehlen, W.: *Technische Dynamik*. Teubner Studienbücher (1986)

[76] Shimbo, M.: *Friction on snow of ski soles, unwaxed and waxed*. The Society of Ski Science (Ed.), Scientific study of skiing in Japan, Tokyo 99-113 (1971)

[77] Slotfeldt-Ellingsen, D.: *Hvorfor er is og sno glatt (Why are ice and snow slick?)*. SIF Rapport 79, 04, 03-1, Oslo (1979)

[78] Slotfeldt-Ellingsen, D., Torgersen L.: *Water in Ice, Influence on Friction, Proceedings*. VI International Symposium on the Physics and Chemistry of Ice. Rolla, Missouri (1982)

[79] Spring, E., Savolainen, S., Erkkilä, Hämäläinen, T., Pihkala P.: *Drag Area of a Cross-Country Skier*. International Journal of Sport Biomechanics 4, 103-113 (1988)

[80] Stoer J., Bulirsch R.: *Introduction to Numerical Analysis*. Springer (1989)

[81] Thomann, H.: *Einfache Regel für den Einfluss des Luftwiderstandes bei Abfahrtsrennen der Skifahrer*. Leistungssport 6, 2, 87-90 (1976)

[82] Torgersen, L.: *Good Glide. The science of ski waxing*. Human Kinetics Publishers, Inc., Illinois (1985)

[83] Townend, St.M.: *Downhill Skiing*. Mathematics in Sport, Ellis Horwood Limited (1984)

[84] Tusima, K., Yosida Z.: *Melting of ice by friction*. Hokkaido University, Low Temperature Science Report A, 28-30 (1969)

[85] Vogl, A.: *Messungen von Einflüssen auf die Fahreigenschaften am Ski*. Biomechanik des Schilaufs, F. Fetz (Hg.), Inn Verlag, Innsbruck 15-26 (1977)

[86] Volkov, N.I., Remizov, L.P., Chirkovets, E.A.: *The criterion of the best tactics in the alpine ski racing*. Teorija i practica fizicheskoj kultury 12 (1971)

[87] Ward-Smith, A.J., Clements, D.: *Experimental determination of the aerodynamic characteristics of ski-jumpers*. Aeronautical Journal 1025, 384-391 (1982)

[88] Warren, G.C., Colbeck, S.C., Kennedy, F.E.: *Thermal response of downhill skis*. Report 89-23, Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL), Hanover, New Hampshire (1989)

[89] Watanabe, K.: *Skiing research in Japan*. Medicine and Science in Sports and Exercise 13, 205-209 (1981)

[90] Watanabe, K.: *Running Speed of Skiing in Relation to Posture*. Biomechanics of Sports and Kinanthropometry, International Congress of Physical Activity Sciences, Quebec City (1976)

[91] Watanabe, K., Ohtsuki, T.: *The effects of posture on the running speed of skiing*. Ergonomics 21, 987-998 (1978)

[92] Watanabe, K., Ohtsuki, T.: *Postural changes and aerodynamic forces in Alpine skiing*. Ergonomics 20, 121-131 (1977)

[93] Yosida, Z.: *Theoretical Studies on Motion of Snow Kicked up by a Snowplow*. Contributions from the Institute of Low Temperature Science Ser. A, 30, 1-36 (1980)