

æ

**Fourierreihen nach Eigenfunktionen
regulärer Sturm-Liouvillescher-Randwertprobleme
und deren Anwendung zur Berechnung von
Fehlerabschätzungen für Separationslösungen
partieller Differentialgleichungen**

Martin Mössner

Diplomarbeit

eingereicht bei Univ. Doz. Dr. Norbert Ortner

Oktober 1988

Institut für Mathematik und Geometrie, Universität Innsbruck
Technikerstrae 13, A-6020 Innsbruck, Österreich

Willst du ein Schiff bauen,
rufe nicht Männer zusammen,
um Holz zu beschaffen
und Werkzeuge vorzubereiten –
sondern lehre sie die Sehnsucht
nach dem weiten, endlosen Meer!

Antoine de Saint-Exupéry

Aus Dankbarkeit meinen Eltern.

Lebenslauf

Ich, Martin Mössner, wurde am 20. März 1964 als Sohn der Hausfrau Barbara Mössner, geborene Klammer, und des Portiers Heribert Mössner in Innsbruck geboren. Von 1970–74 besuchte ich die Volksschule Allerheiligen, dann von 1974–78 die Knabenhauptschule Hötting und anschließend von 1978–82 den naturwissenschaftlichen Zweig des Bundesoberstufenrealgymnasiums, alle in Innsbruck. Meine Schulbildung schloß ich am 30. Juni 1982 mit der Matura ab.

Im Wintersemester 82/83 begann ich mein Studium an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Innsbruck. Anfänglich studierte ich die Fächer Mathematik und Astronomie, wechselte aber im 4. Semester auf die Fächer Mathematik und Physik. Am 16. Jänner 1985 bestand ich die erste Diplomprüfung in Physik und am 4. März die in Mathematik mit Auszeichnung. Im Laufe des Sommersemesters 87 begann ich mit der nun vorliegenden Diplomarbeit.

Schon in der Mittelschulzeit fing ich an selbständig mathematische Themen zu behandeln und erhielt dafür wertvolle Preise. So zum Beispiel im Herbst 1982 vom groen österreichischen Jugendpreis für eine Arbeit über Ephemeridenrechnung und ein Jahr darauf mit einer Konstruktionsanleitung einer exakten Sonnenuhr sowie schnellen Fortranprogrammen zur Berechnung der Zahlen e und π .

Im Studienjahr 1984/85 erhielt ich das Begabtenstipendium und ein Jahr danach das Leistungsstipendium. Weiters war ich in der Zeit von 1. Feber 1986 bis 30. Juni 1988 als Studienassistent am Institut für Mathematik und Geometrie an der Fakultät für Bauingenieurwesen in Innsbruck angestellt.

Meine Adresse: Martin Mössner, Galgenbühelweg 5, A-6020 Innsbruck, Österreich.

æ

Vorwort

Diese Arbeit wurde angeregt durch eine Vorlesung über partielle Differentialgleichungen von Doz. Dr. Norbert Ortner, die er im wesentlichen nach dem Buch von Weinberger⁰ gehalten hatte. Dort werden ähnliche, jedoch gröbere, Fehlerabschätzungen benützt um die Lösungseigenschaften, d. h. die Differentialgleichung, und die Rand- und Anfangsbedingungen zu zeigen. Weinberger betrachtet jedoch meist nur Dirichlet-Randbedingungen.

Danken möchte ich vor allem Doz. Dr. Norbert Ortner dafür, da er das von mir gewählte Thema betreut, mir stets mit wertvollen Ratschlägen und Literaturvorschlägen geholfen und, was für den Fortgang der Arbeit sehr förderlich war, sich immer sehr interessiert gezeigt hat.

Danken möchte ich auch meinem Institutsvorstand Prof. Dr. Herbert Kremser für die Benützung der Instituts Einrichtungen, vor allem für die reichhaltige Bibliothek, sowie dafür, da er mir die nötige Freiheit gab, mich vor allem meinen mathematischen Interessen zuzuwenden.

Dank schulde ich auch Doz. Dr. Michael Oberguggenberger für seine Anregungen in Sachen Differentialgleichungen, Doz. Dr. Peter Kaps für die zahlreichen Diskussionen über numerische Probleme, sowie Mag. Reinhard Stix für die Hinweise im Zusammenhang mit der Benützung des Textverarbeitungssystems $\text{\TeX}^{0\ 0}$.

Aber auch all jenen, die am Zustandekommen dieser Arbeit beteiligt waren und hier nicht namentlich genannt sind, insbesondere auch dafür, da am Institut ein so angenehmes Arbeitsklima herrscht, sei gedankt.

⁰ Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations.

⁰ Knuth, D. E.: Computers & Typesetting / A. The $\text{\TeX}$ book.

⁰ Spivak, M. D.: The Joy of $\text{\TeX}$. A Gourmet Guide to Typesetting with the $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\TeX}$ macro package.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Inhaltsverzeichnis	ii
1. Die Schwingungsgleichung	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Die Schwingungsgleichung	1
2. Reguläre Sturm-Liouville Randwertprobleme	10
2.1 Definition und Eigenschaften der Eigenfunktionen	10
2.2 Wesentliche Randbedingungen – Rayleighquotient	12
3. Allgemeine Fourierreihen	16
3.1 Fourierreihen – Greensche Funktion	16
3.2 Konvergenz im quadratischen Mittel	19
4. Gleichmäßige Konvergenz und Fehlerabschätzung	24
4.1 Allgemeiner Fall	24
4.2 Logarithmische Ableitungen der Gammafunktion	26
4.3 Ergebnisse für die Schwingungsgleichung	28
5. Numerische Bemerkungen	31
5.1 Oszillations- und Monotoniesatz, asymptotische Darstellung	31
5.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen	32
5.3 Fourierkoeffizienten, Fourierreihen und Fehlerabschätzungen	33
6. Tabelle zur Schwingungsgleichung	34
7. Allgemeines zu partiellen Differentialgleichungen	39
8. Die Wärmeleitungsgleichung	40
8.1 Die gewöhnliche Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen ..	40
8.2 Die gedämpfte Schwingungsgleichung	44
8.3 Die gedämpfte Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen	47
9. Die Wellengleichung	51
9.1 Die gewöhnliche Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen	51
9.2 d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung	56
9.3 Die gedämpfte Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen	57
9.2 Verbesserung der Lösung für $a = 0$	64
10. Die Laplacegleichung	65
10.1 Die Laplacegleichung im Rechteck	65
Literaturangaben	69
Lebenslauf	70

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, MILTON, STEGUN, IRENE, A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York (1972).
- [2] BUTKOVSKIY, ANATOLIY G.: *Green's Functions and Transfer Functions Handbook*. Ellis Horwood Limited, Chichester, (1982).
- [3] CARSLAW, HORATIO SCOTT, JAEGER JOHN CONRAD: *Conduction of Heat in Solids*. Second Edition, Oxford at the Clarendon Press, (1973).
- [4] CRANK, JOHN: *The Mathematics of Diffusion*. Second Edition, Oxford at the Clarendon Press, (1975).
- [5] GRÖBNER, WOLFGANG: *Differentialgleichungen. Erster Teil: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Bibliographisches Institut Mannheim / Wien / Zürich, (1977).
- [6] HABERMAN, RICHARD: *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
- [7] KAMKE, ERICH: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, (1983).
- [8] KELLER, HERBERT BISHOP: *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. Blaisdell Publishing Company, (1968).
- [9] KNUTH, DONALD ERVIN: *Computers & Typesetting / A. The T_EXbook*. Addison Wesley Publishing Company, (1986).
- [10] OLVER, FRANK W. J.: *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, New York, London, (1974).
- [11] PIETSCH, ALBRECHT: *Nuclear Locally Convex Spaces*. Springer, (1972).
- [12] SCHWARZ, HANS RUDOLF: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, (1986).
- [13] SOBOLEV, SERGEĬ L'VOVIČ: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Pergamon Press, Oxford, (1964).
- [14] SPIVAK, MICHAEL D.: *The Joy of T_EX. A Gourmet Guide to Typesetting with the A_MS-T_EX macro package*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1987).
- [15] TITCHMARSH, EDWARD CHARLES: *Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations*. Second Edition, Oxford at the Clarendon Press, (1969/70).
- [16] VLADIMIROV, VASILII SERGEEVIČ ET COLL.: *Recueil de Problèmes d'Équations de Physique Mathématique*. Éditions MIR, Moscou, (1976).
- [17] WEINBERGER, HANS FELIX: *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*. John Wiley & Sons, New York, (1965).
- [18] ZAUDERER, ERICH: *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, New York, (1983).

æ

1. Die Schwingungsgleichung

1.1. Einleitung

Bevor wir uns mit Separationslösungen partieller Differentialgleichungen befassen, wollen wir zuerst allgemeine Fourierreihen untersuchen. Wir werden uns dabei mit Entwicklungen nach Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung und im allgemeinen mit Sturm-Liouville Randwertproblemen befassen. Für solche Entwicklungen werde ich eine Theorie angeben, die die Vollständigkeit der Eigenfunktionen und die gleichmäßige Konvergenz der entstehenden Fourierreihen zeigt.

Wir werden bei der Schwingungsgleichung mit allgemein formulierten Randbedingungen alle Behauptungen explizit nachrechnen. Bei der Verallgemeinerung, nämlich den Sturm-Liouville Randwertproblemen, werden wir zwar eine vollständige Theorie angeben, diese jedoch nicht in jedem Detail nachvollziehen, sondern uns mit Literaturverweisen begnügen. Die Schwingungsgleichung wollen wir deshalb so genau untersuchen, da man bei ihr die Eigenfunktionen sehr gut beherrscht und da Entwicklungen nach Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung bei Separationslösungen partieller Differentialgleichungen oft auftreten werden. Durch die genaue Kenntnis der Eigenfunktionen werden sich manche Beweise verkürzen, andere jedoch werden gleich bleiben, weshalb ich diese auch in der allgemeinen Form angeben und beweisen werde.

Als eigentliches Ziel werden wir mit Hilfe der Cauchy-Bunyakovskii-Schwarzschen Ungleichung (CBS-Ungl.) eine gleichmäßige Fehlerabschätzung für den Reihenrest angeben. Hat man Sturm-Liouville Randwertprobleme explizit zu lösen, so wird man oft auf numerische Methoden zurückgreifen müssen, um die auftretenden Integrale, Eigenfunktionen und Eigenwerte zu berechnen. Damit werden aus den angegebenen Fehlerabschätzungen Fehlerschätzungen, die jedoch bei sorgfältiger Wahl der numerischen Methoden immer noch wertvolle Dienste leisten werden.

1.2. Die Schwingungsgleichung

Definition 1.1.

Das Randwertproblem der Schwingungsgleichung auf dem beschränkten Intervall $(0, L)$, $L > 0$ ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\phi'' + \lambda\phi = 0, \quad x \in (0, L). \quad (1.2-1)$$

zusammen mit den linearen Randbedingungen

$$\begin{aligned}\alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) &= 0, & (\alpha, \beta) &\neq 0; \\ \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) &= 0, & (\gamma, \delta) &\neq 0.\end{aligned}\tag{1.2-2}$$

Die Bedingungen $(\alpha, \beta) \neq 0$ und $(\gamma, \delta) \neq 0$ garantieren, da überhaupt Randbedingungen auftreten. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten, können wir uns auf die Normierung

$$\beta, \delta \in \{0, 1\}, \quad \text{und falls} \quad \begin{aligned} \beta &= 0, \text{ dann } \alpha = 1; \\ \delta &= 0, \text{ dann } \gamma = 1. \end{aligned}\tag{1.2-3}$$

beschränken, die wir im folgenden konsequent verwenden werden. Um uns Schreibarbeit zu sparen, führen wir noch die Wurzel der Eigenwerte ein.

$$\mu = \sqrt{|\lambda|}.\tag{1.2-4}$$

Um den Zusammenhang mit den wahren Eigenwerten hervorzuheben wollen wir diese Zahlen μ auch Eigenwerte nennen.

Nun können wir zur Konstruktion der Lösungen übergehen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\phi'' + \lambda\phi = 0$ kann man in der Form

$$\phi(x) = \begin{cases} A \cosh \mu x + B \sinh \mu x, & \text{falls } \lambda < 0; \\ A + Bx, & \text{falls } \lambda = 0; \\ A \cos \mu x + B \sin \mu x, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases}$$

schreiben. Setzt man diese Lösung in die linke Randbedingung ein, so erhält man

$$0 = \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) = \begin{cases} \alpha A + \beta\mu B, & \text{falls } \mu > 0; \\ \alpha A + \beta B, & \text{falls } \mu = 0. \end{cases}$$

Im Fall $\beta = 0$ erhalten wir $A = 0$, da ja laut Normierung $\alpha = 1$ gilt. Somit erhalten wir

$$\phi(x) = A \cdot \begin{cases} \sinh \mu x, & \text{falls } \lambda < 0; \\ x, & \text{falls } \lambda = 0; \\ \sin \mu x, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases}$$

Ist $\beta \neq 0$, so ist laut Normierung $\beta = 1$ und daher $B = -\alpha A/\mu$ bzw. $B = -\alpha A$. Also:

$$\phi(x) = A \cdot \begin{cases} \alpha \sinh \mu x - \mu \cosh \mu x, & \text{falls } \lambda < 0; \\ \alpha x - 1, & \text{falls } \lambda = 0; \\ \alpha \sin \mu x - \mu \cos \mu x, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases}$$

Diese zwei Fälle lassen sich einheitlich schreiben; wir fassen sie im folgenden Satz zusammen.

Satz 1.1.

Die Lösung der Differentialgleichung $\phi'' + \lambda\phi = 0$ mit der Randbedingung $\alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) = 0$ ist gegeben durch

$$\phi(x) = A \cdot \begin{cases} \alpha \sinh \mu x - \beta\mu \cosh \mu x, & \text{falls } \lambda < 0; \\ \alpha x - \beta, & \text{falls } \lambda = 0; \\ \alpha \sin \mu x - \beta\mu \cos \mu x, & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases}\tag{1.2-5}$$

wobei $\mu = \sqrt{|\lambda|}$ zu setzen ist.

Wir werden uns im folgenden auf die Normierung $A = 1$ beschränken. Mit Hilfe der rechten Randbedingung stellen wir die Gleichungen für die Wurzeln der Eigenwerte μ auf. Es ist

$$0 = \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) = \gamma \begin{Bmatrix} \alpha \sinh \mu L - \beta \mu \cosh \mu L \\ \alpha L - \beta \\ \alpha \sin \mu L - \beta \mu \cos \mu L \end{Bmatrix} + \delta \begin{Bmatrix} \alpha \mu \cosh \mu L - \beta \mu^2 \sinh \mu L \\ \alpha \\ \alpha \mu \cos \mu L + \beta \mu^2 \sin \mu L \end{Bmatrix}.$$

Daraus erhalten wir

Satz 1.2.

Die Schwingungsgleichung $\phi'' + \lambda\phi = 0$ mit linearen Randbedingungen hat, falls die folgende Gleichung für $\mu = \sqrt{|\lambda|}$ erfüllt ist, die in Satz 1.1 angegebene Lösung.

$$\begin{aligned} (\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2) \sinh \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cosh \mu L &= 0, & \text{falls } \lambda < 0, \quad \mu = \sqrt{-\lambda}; \\ \alpha\delta - \beta\gamma + \alpha\gamma L &= 0, & \text{falls } \lambda = 0, \quad \mu = 0; \\ (\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cos \mu L &= 0, & \text{falls } \lambda > 0, \quad \mu = \sqrt{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.2-6)$$

Definition 1.2.

Gilt für lineare Randbedingungen einer der vier nachfolgenden Fälle

- (1) $\beta = 0$ und $\delta = 0$;
 - (2) $\beta = 0$, $\delta \neq 0$ und $\gamma/\delta \geq 0$;
 - (3) $\beta \neq 0$, $\delta = 0$ und $\alpha/\beta \leq 0$;
 - (4) $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\alpha/\beta \leq 0$ und $\gamma/\delta \geq 0$.
- (1.2-7)

so nennen wir sie physikalische Randbedingungen.

Die Namensgebung deutet schon auf den Zusammenhang zu physikalisch sinnvoll gestellten Problemen hin. Etwas deutlicher kann man dies schon aus folgendem Satz entnehmen, da ja negative Eigenwerte exponentiell anwachsenden Lösungen entsprechen.

Satz 1.3.

Die Schwingungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen hat nur nichtnegative Eigenwerte.

Zum Beweis dieses Satzes verweise ich auf die nachfolgende Diskussion der Eigenwerte. Wir werden diesen Satz im nächsten Kapitel für allgemeine Sturm-Liouville Randwertprobleme beweisen. Zu erwähnen ist noch, da die physikalischen Randbedingungen bei partiellen Differentialgleichungen gerade den Dirichlet-, Neumann-, gemischten Dirichlet-Neumann und den Robin-Randbedingungen entsprechen. ■

Wir wenden uns nun der genaueren Diskussion der Gleichungen (1.2-6) zu. Als erstes betrachten wir die Gleichung für die negativen Eigenwerte.

$$(\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2) \sinh \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cosh \mu L = 0, \quad \mu > 0, \lambda = -\mu^2.$$

Ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, so ist $(\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2) \sinh \mu L = 0$ zu lösen. Unter der Voraussetzung $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ erhalten wir durch Fallunterscheidung

$$\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2 = \begin{cases} 1, & \text{falls } \beta\delta = 0; \\ \alpha^2 - \mu^2, & \text{falls } \beta = \delta = 1. \end{cases}$$

Wegen $\mu L > 0$ erhalten wir genau dann eine Lösung $\mu > 0$, falls $\beta = \delta = 1$ und $\alpha = \gamma \neq 0$, nämlich $\mu = +|\alpha|$. Bei physikalischen Randbedingungen tritt daher keine Lösung auf. Für $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ haben wir

$$\mu \coth \mu L = -\frac{\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Wir suchen also die Nullstellen der Funktion $f(x) = a - bx^2 + x \coth x = 0$ für positive Werte von x , wobei

$$a = \frac{\alpha\gamma L}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad b = \frac{\beta\delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)L}, \quad \text{und} \quad x = \mu L. \quad (1.2-8)$$

zu setzen ist. Ihre Ableitung lautet

$$f'(x) = -2bx + \frac{\sinh x \cosh x - x}{\sinh^2 x} =: -2bx + g(x).$$

Für die Funktion g gilt

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{x \cosh x - \sinh x}{\sinh^3 x};$$

$$g''(x) = 2 \cdot \frac{3 \sinh x \cosh x - x - 2x \cosh^2 x}{\sinh^4 x} =: 2 \cdot \frac{h(x)}{\sinh^4 x}.$$

Es ist $h(0) = 0$ und $h'(x) = 4 \sinh x (\sinh x - x \cosh x) < 0$, da man durch Einsetzen der Potenzreihen für $\sinh$ und $\cosh$

$$\sinh x - x \cosh x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} < 0, \text{ falls } x > 0.$$

erhält. Deshalb ist $\forall x > 0$, $h(x) < 0$ und somit auch $g''(x) < 0$, d.h.: g ist streng konkav, weshalb die Gerade $2bx$ die Funktion $g(x)$ höchstens an zwei Punkten treffen kann. Mit Hilfe der Regel von l'Hospital erhalten wir weiters

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x - 1}{2 \sinh x \cosh x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sinh x}{\cosh x} = 0.$$

d.h.: für $x > 0$ gibt es höchstens einen Schnittpunkt. Wir haben damit: f' hat in $x > 0$ höchstens eine Nullstelle. Hätte nun f mehr als zwei Nullstellen, so ergäbe der Satz von Rolle, da f' mehr als eine Nullstelle hätte, was einen Widerspruch darstellt. Wir haben gefunden, da f höchstens zwei positive Nullstellen hat, d.h. da es höchstens zwei negative Eigenwerte gibt. Andererseits hat f für $a = -2$, $b = 0.1$ je eine Nullstelle in den Intervallen $[2.7, 2.8]$ und $[7.2, 7.3]$. Es können also im allgemeinen Fall auch tatsächlich zwei negative Eigenwerte auftreten.

Speziell bei physikalischen Randbedingungen erhält man, falls $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist, mit Definition 1.2, da $a \geq 0$ und $b \leq 0$ ist. Da nun mit $l(x) = \sinh x \cosh x - x$, $l(0) = 0$, $l'(x) = 2 \sinh^2 x > 0$ und somit $\forall x > 0$, $l(x) > 0$ gilt, haben wir $g(x) > 0$ und $-2bx \geq 0$ also $f'(x) > 0$, sofern nur $x > 0$ ist. Es ist f streng monoton steigend und daher $f(x) \geq f(0) = a + 1 > 0$. Bei physikalischen Randbedingungen hat f keine Nullstelle, was gerade die Aussage des Satzes 1.3 darstellt.

Die zweite Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma + \alpha\gamma L = 0, \quad \mu = 0, \lambda = 0.$$

ist genau dann erfüllt, falls $\alpha = \gamma = 0$ oder $\alpha \neq 0 \neq \gamma$ und $L = -(\alpha\delta - \beta\gamma)/(\alpha\gamma)$ ist.

Die dritte Gleichung erfordert wieder etwas mehr Sorgfalt.

$$(\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cos \mu L = 0, \quad \mu > 0, \lambda = \mu^2.$$

Im Fall $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ haben wir $(\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) \sin \mu L = 0$ zu lösen. Unter der Voraussetzung $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ erhalten wir wie oben

$$\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2 = \begin{cases} 1, & \text{falls } \beta\delta = 0; \\ \alpha^2 + \mu^2, & \text{falls } \beta = \delta = 1. \end{cases}$$

Es ist $\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2 > 0$ für $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ und damit $\sin \mu L = 0$, d.h.: $\mu = n\pi/L$. Im Fall $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ haben wir

$$\mu \cot \mu L = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

Wir betrachten in Analogie zu oben die Funktion $f(x) = a + bx^2 + x \cot x$, a, b, x wie in (1.2-8). Es gilt

$$\lim_{x \searrow n\pi} f(x) = \begin{cases} 1 + a, & \text{falls } n = 0; \\ +\infty, & \text{falls } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow n\pi} f(x) = -\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Funktion f in jedem offenen Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$ stetig ist, haben wir: f hat in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$ mindestens eine Nullstelle; falls $a > -1$ gilt, so liegt auch in $(0, \pi)$ mindestens eine Nullstelle von f . Mithin existieren also unendlich viele Eigenwerte für die Schwingungsgleichung.

Weiters gilt für die Ableitung von f

$$f'(x) = 2bx + \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} =: 2bx - g(x).$$

Für die Funktion $l(x) = x - \sin x \cos x$ haben wir $l(0) = 0$, $l'(x) = 2 \sin^2 x > 0$, also $l(x) > 0$ falls $x > 0$. Damit ist $f'(x) < 0$, falls $x > 0$ und $b \leq 0$. Für $b \leq 0$ hat f in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens eine Nullstelle. Speziell bei physikalischen Randbedingungen hat man $a \geq 0$ und $b \leq 0$. Es tritt also in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine Nullstelle von f auf.

Weiters wollen wir die maximale Anzahl der Nullstellen abschätzen. Laut obiger Überlegung ist l eine positive, monoton steigende Funktion. Da $\sin^2 x$ in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$ konkav und positiv ist, ist dort $1/\sin^2 x$ konvex und $g(x) = l(x)/\sin^2 x$ ebenfalls konvex. Es hat daher die Gerade $2bx$ mit g in jedem Intervall $(n\pi, (n+1)\pi)$ höchstens 2 Schnittpunkte. f' hat höchstens 2 und, gemäß dem Satz von Rolle, f höchstens 3 Nullstellen. Speziell bei $a = -20$ und $b = 1$ hat man je eine Nullstelle in $[3.6, 3.7]$, $[4.1, 4.2]$ und $[5.9, 6.0]$; es kann also im allgemeinen keine bessere Aussage erzielt werden. Zusammenfassend haben wir

Satz 1.4.

Die Schwingungsgleichung mit linearen Randbedingungen hat folgende Eigenschaften

- (1) *Es gibt höchstens 2 negative Eigenwerte.*
- (2) *0 ist genau dann Eigenwert, falls $\alpha = \gamma = 0$ oder $\alpha \neq 0 \neq \gamma$ und $L = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma}$ ist.*
- (3) *Es gibt unendlich viele, positive Eigenwerte, wobei in jedem Intervall*

$[n\pi/L, (n+1)\pi/L]$, $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein Eigenwert liegt.

- (4) *Die Anzahl der Eigenwerte pro Intervall $[n\pi/L, (n+1)\pi/L]$, $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

höchstens gleich 3.

- (5) *(1)–(4) ergeben, da es genau abzählbar viele Eigenwerte gibt.*

Speziell für physikalische Randbedingungen gilt:

- (6) Es gibt abzählbar viele Eigenwerte, die alle nichtnegativ sind.
- (7) Für $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ gilt $\mu_n = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$.
Falls $\alpha = \gamma = 0$ ist, so ist auch 0 ein Eigenwert.
- (8) Bei $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ gilt für den n -ten Eigenwert $(n-1)\pi/L < \mu_n < n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$.

Bevor wir uns allgemeinen Sturm-Liouville-Problemen zuwenden, wollen wir ein paar Eigenschaften obiger Eigenfunktionen festhalten. Zuerst die asymptotischen Werte für die Eigenwerte

Satz 1.5.

Ist $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $s = \text{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) \in \{\pm 1\}$, so ergibt sich asymptotisch für die Eigenwerte

$$\mu_n \sim \begin{cases} \frac{n\pi}{L}, & \text{falls } s\beta\delta > 0; \\ \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, & \text{falls } \beta\delta = 0; \\ (n-1) \frac{\pi}{L}, & \text{falls } s\beta\delta < 0. \end{cases} \quad (1.2-9)$$

Ist $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, so gilt exakt $\mu_n = n\pi/L$.

Zum Beweis mu man nur die Gleichung (1.2-6) etwas umschreiben

$$\cot \mu L = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)\mu} = -\frac{a}{\mu L} - b\mu L \sim -b\mu L. \quad \square$$

Als nächsten Schritt wollen wir zu (1.2-6) äquivalente Gleichungen für die Eigenwerte aufstellen. Dazu beweisen wir zuerst folgenden Hilfsatz

Hilfsatz 1.1.

Für zwei Zahlen a, b mit $a^2 + b^2 > 0$ gilt die Gleichung

$$a \sin x + b \cos x = 0.$$

genau dann, wenn für ein $n \in \mathbb{Z}$ die folgenden zwei Gleichungen erfüllt sind.

$$\sin x = (-1)^{n+1} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos x = (-1)^n \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1.2-10)$$

Wegen $w = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ folgt mit $u = a/w$ und $v = b/w$, da $u^2 + v^2 = 1$ ist. Es existiert daher ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$, soda $u = \cos \vartheta$ und $v = \sin \vartheta$ gilt. Damit erhält man

$$0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \cos \vartheta \sin x + \sin \vartheta \cos x = \sin(x + \vartheta).$$

Daher ist für ein $n \in \mathbb{Z}$, $x = n\pi - \vartheta$.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(n\pi - \vartheta) = (-1)^{n+1} \sin \vartheta = (-1)^{n+1} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \\ \cos x &= \cos(n\pi - \vartheta) = (-1)^n \cos \vartheta = (-1)^n \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Hilfsatz 1.2.

Die dritte Gleichung von (1.2-6) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\sin \mu L &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\mu}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2\mu^2)(\gamma^2 + \delta^2\mu^2)}}; \\ \cos \mu L &= (-1)^n \cdot \frac{\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2\mu^2)(\gamma^2 + \delta^2\mu^2)}}.\end{aligned}\quad (1.2-11)$$

Wir haben laut Gleichung (1.2-6) $a = \alpha\gamma + \beta\delta\mu^2$ und $b = (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu$, also

$$a^2 + b^2 = (\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2)^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)^2\mu^2 = (\alpha^2 + \beta^2\mu^2)(\gamma^2 + \delta^2\mu^2) > 0. \quad \square$$

Wir wollen nun die L^2 -Norm der Eigenfunktionen $\phi(x) = \alpha \sin \mu x - \beta\mu \cos \mu x$, $\lambda > 0$ berechnen. Für sie gilt

$$\begin{aligned}\|\phi\|^2 &= \int_0^L (\alpha \sin \mu x - \beta\mu \cos \mu x)^2 dx \\ &= (\alpha^2 + \beta^2\mu^2) \frac{L}{2} - \frac{1}{2\mu} \left((\alpha^2 - \beta^2\mu^2) \sin \mu L \cos \mu L + 2\alpha\beta\mu \sin^2 \mu L \right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe obigen Hilfsatzes erhalten wir

$$\|\phi\|^2 = (\alpha^2 + \beta^2\mu^2) \frac{L}{2} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{2(\alpha^2 + \beta^2\mu^2)(\gamma^2 + \delta^2\mu^2)} \left((\alpha^2 - \beta^2\mu^2)(\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) - 2\alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma)\mu^2 \right).$$

und nach kurzer Rechnung

$$(\alpha^2 - \beta^2\mu^2)(\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) - 2\alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma)\mu^2 = (\alpha^2 + \beta^2\mu^2)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu^2).$$

Damit ergibt sich folgender Satz

Satz 1.6.

Für die L^2 -Norm der Eigenfunktionen $\phi_n(x) = \alpha \sin \mu_n x - \beta\mu_n \cos \mu_n x$, ergibt sich

$$\|\phi_n\|^2 = \int_0^L (\alpha \sin \mu_n x - \beta\mu_n \cos \mu_n x)^2 dx = (\alpha^2 + \beta^2\mu_n^2) \frac{L}{2} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{2(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)}. \quad (1.2-12)$$

Satz 1.7.

Mit

$$f(N) = f(N; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} 1, & \text{bei phys. Rb. oder } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ 1 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_N^2)}{(\alpha^2 + \beta^2\mu_N^2)(\gamma^2 + \delta^2\mu_N^2)L}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2-13)$$

gilt $f(N) \in (0, 1]$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gelten die Ungleichungen

$$\|\phi_n\|^2 \geq (\alpha^2 + \beta^2\mu_n^2) \frac{L}{2} f(N), \quad \text{und} \quad \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2} \leq \frac{2}{f(N)L}. \quad (1.2-14)$$

Es ist

$$\|\phi_n\|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2) \frac{L}{2} \left(1 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right).$$

Wegen

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) = \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2\mu^2) - \alpha\beta(\gamma^2 + \delta^2\mu^2).$$

folgt mit

$$g(n) = 1 + \frac{\gamma\delta}{(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)L}.$$

da $\|\phi_n\|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)Lg(n)/2$ gilt.

Bei physikalischen Randbedingungen erhält man für g

$$g(n) = 1 + \frac{|\gamma\delta|}{(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} + \frac{|\alpha\beta|}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)L}.$$

Nach Satz 1.4 bilden die Eigenwerte eine streng monoton gegen $+\infty$ anwachsende Folge, weshalb die Funktion $g(n)$ für $n \rightarrow \infty$ streng monoton gegen 1 fällt. Also

$$g(n) \geq 1, \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 1.$$

weshalb $f(N) = 1$ gesetzt werden kann. Bei $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ist $\|\phi\|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 \mu^2)L/2$, woraus die Aussage folgt. Die restlichen Randbedingungen haben, unter Berücksichtigung der Normierung (1.2–3), eine der drei nachfolgenden Formen

$$\beta = 0, \delta = 1 \text{ und } \gamma < 0;$$

$$\beta = 1, \delta = 0 \text{ und } \alpha > 0;$$

$$\beta = 1, \delta = 1, \alpha > 0 \text{ und } \delta < 0.$$

Für diese Randbedingungen erhält man für g

$$g(n) = 1 - \frac{|\gamma\delta|}{(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} - \frac{|\alpha\beta|}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)L}.$$

d.h.: g ist streng monoton von $g(N)$ auf 1 anwachsend, weshalb $f(N) = g(N) \leq g(n)$ die Aussage erfüllt. Damit erhalten wir nun weiters

$$\frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2} \leq \left(\frac{\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2}} \right)^2 \cdot \frac{2}{f(N)L}.$$

Mit $u = \alpha/w$, $v = -\beta\mu/w$ und $w = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \mu^2}$ ist $u^2 + v^2 = 1$, weshalb es ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$ gibt, soda $u = \cos \vartheta$ und $v = \sin \vartheta$ gilt. Einsetzen ergibt

$$\frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2} \leq (\cos \vartheta \sin \mu_n x + \sin \vartheta \cos \mu_n x)^2 \cdot \frac{2}{f(N)L} = (\sin(\mu_n x + \vartheta))^2 \cdot \frac{2}{f(N)L} \leq \frac{2}{f(N)L}. \quad \square$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die Normen für die Eigenfunktionen nichtpositiver Eigenwerte angegeben.

Satz 1.8.

Für die Eigenfunktion $\phi_0(x) = \alpha x - \beta$ erhalten wir

$$\|\phi_0\|^2 = \beta^2 L - \alpha\beta L^2 + \frac{1}{3}\alpha^2 L^3. \quad (1.2-15)$$

und für $\phi_{-n}(x) = \alpha \sinh \mu_{-n} x - \beta \mu_{-n} \cosh \mu_{-n} x$, $n = 1, 2$ ergibt sich

$$\|\phi_{-n}\|^2 = (\beta^2 \mu_{-n}^2 - \alpha^2) \frac{L}{2} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + \beta\delta\mu_{-n}^2)}{2(\delta^2 \mu_{-n}^2 - \gamma^2)}. \quad (1.2-16)$$

Definition 1.3.

Die periodischen Randbedingungen sind gegeben durch

$$\phi(0) = \phi(L), \quad \text{und} \quad \phi'(0) = \phi'(L). \quad (1.2-17)$$

Satz 1.9.

Die Schwingungsgleichung mit periodischen Randbedingungen hat die Eigenfunktionen

$$\phi_n(x) = 1, \quad \sin \frac{2n\pi x}{L}, \quad \cos \frac{2n\pi x}{L}. \quad (1.2-18)$$

und somit die Eigenwerte

$$\lambda_n = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (1.2-19)$$

Für die Norm der Eigenfunktionen gilt

$$\|\phi_0\|^2 = L, \quad \text{und} \quad \|\phi_n\|^2 = \frac{L}{2}. \quad (1.2-20)$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse kann man die Behauptungen des Satzes leicht verifizieren; deshalb wollen wir den Beweis weglassen.

æ

2. Reguläre Sturm-Liouville Randwertprobleme

2.1. Definition und Eigenschaften der Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir als Verallgemeinerung der Schwingungsgleichung Differentialgleichungen Sturm-Liouvilleschen Typs. Ideenmäßig wollen wir vor allem der Darstellung von Weinberger⁰ folgen. Bei Weinberger sind nur die Randbedingungen $\phi(0) = \phi(L) = 0$ behandelt; wir werden jedoch die Theorie für allgemeine physikalische oder periodische Randbedingungen entwickeln. Weitere leicht verständliche Darstellungen sind zum Beispiel in Haberman⁰ oder in Zauderer⁰ zu finden. Die allgemeine Theorie ist etwa in Abschnitt B von Kamke⁰ oder in Titchmarsh⁰ dargelegt, weshalb wir öfters auf diese Bücher verweisen werden. Numerische Methoden sind in Keller⁰ zu finden.

Definition 2.1.

Ein reguläres Sturm-Liouville-Randwert-Problem(SL) ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) - q; \quad & p \in C^1[0, L], \quad p > 0; \\ \text{und} \quad & q \in C[0, L], \quad q \geq 0; \\ L\phi + \lambda\rho\phi = 0. \quad & \rho \in C[0, L], \quad \rho > 0. \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

gemeinsam mit den linearen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) &= 0, \quad (\alpha, \beta) \neq 0; \\ \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) &= 0, \quad (\gamma, \delta) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

oder den periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi(L); \\ p(0)\phi'(0) &= p(L)\phi'(L). \end{aligned} \quad (2.1-3)$$

⁰ Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations.

⁰ Haberman, R.: Elementary Applied Partial Differential Equations.

⁰ Zauderer, E.: Partial Differential Equations of Applied Mathematics.

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

⁰ Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations.

⁰ Keller, H. B.: Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems.

Wir werden uns wieder o.B.d.A. auf die Normierung (1.2–3) beschränken. Mit $p = 1, q = 0$ und $\rho = 1$ erhalten wir als Spezialfall die Schwingungsgleichung aus letztem Kapitel. Es gelten daher alle hier abgeleiteten Ergebnisse auch für die Schwingungsgleichung.

Aus der Definition von L erhalten wir

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u(pv')' - quv - v(pu')' + quv \\ &= u(pv')' + pu'v' - v(pu')' - pu'v' \\ &= \left(p(uv' - vu') \right)'. \end{aligned}$$

also die differentielle Form der Lagrangeidentität

$$uLv - vLu = \left(p(uv' - vu') \right)'. \quad (2.1-4)$$

Durch Integration von 0 bis L und Einsetzen der Randbedingungen erhalten wir

$$\int_0^L uLv - vLu \, dx = p(uv' - vu') \Big|_0^L = 0. \quad (2.1-5)$$

Verschwindet obiges Integral für einen Differentialoperator mit entsprechenden Randbedingungen, so spricht man von einem selbstadjungierten Problem.

Sind nun ϕ, ψ zwei Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ, μ von (SL) , so erhält man aufgrund der Eigenwertgleichung und der Lagrangeidentität

$$(\lambda - \mu) \int_0^L \phi\psi\rho \, dx = \int_0^L \phi L\psi - \psi L\phi \, dx = 0.$$

Satz 2.1.

Sind ϕ, ψ Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten λ, μ von (SL) , so gilt

$$\int_0^L \phi\psi\rho \, dx = 0.$$

d.h.: ϕ und ψ sind orthogonal.

Es sei nun ϕ Eigenfunktion zum Eigenwert λ , dann gilt $L\phi + \lambda\rho\phi = 0$ und damit $0 = \overline{L\phi + \lambda\rho\phi} = L\bar{\phi} + \bar{\lambda}\rho\bar{\phi}$. Es ist also auch $\bar{\phi}$ Eigenfunktion; sie gehört zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Setzen wir in obiger Gleichung $\psi = \bar{\phi}$ und $\mu = \bar{\lambda}$, so erhalten wir

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^L \phi\bar{\phi}\rho \, dx = 0.$$

Da ϕ als Lösung einer Differentialgleichung stetig ist und da ϕ als Eigenfunktion nicht identisch verschwinden kann, ist $\int_0^L |\phi|^2 \rho \, dx > 0$, also $\lambda = \bar{\lambda}$.

Satz 2.2.

Alle Eigenwerte von (SL) sind reell.

Als nächstes überlegen wir uns die Einfachheit der Eigenfunktionen. Es seien dazu ϕ und ψ Eigenfunktionen zum selben Eigenwert λ , dann gilt $L\phi + \lambda\rho\phi = 0$ sowie $L\psi + \lambda\rho\psi = 0$. Durch Subtraktion dieser zwei Gleichungen und mit Hilfe der Lagrangeidentität erhalten wir $0 = \phi L\psi - \psi L\phi = (p(\phi\psi' - \psi\phi'))'$, also $p(\phi\psi' - \psi\phi') = \text{const}$. Sind nun lineare Randbedingungen gegeben, so verschwindet dieser Ausdruck identisch, wie man etwa durch Einsetzen der Randbedingung bei 0 leicht einsieht. Wegen $p > 0$ haben wir $\phi\psi' - \psi\phi' = 0$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $d(\phi/\psi)/dx = 0$, d.h.: $\phi/\psi = \text{const}$ oder $\phi = \text{const} \cdot \psi$.

Satz 2.3.

Die Eigenwerte von (SL) zu linearen Randbedingungen sind einfach.

Sind periodische Randbedingungen gegeben, so müssen die Eigenfunktionen nicht mehr einfach sein, wie uns die Schwingungsgleichung mit periodischen Randbedingungen zeigt. Da jedoch die Differentialgleichung die Ordnung 2 hat, gibt es höchstens zwei linear unabhängige Lösungen d.h., da die Vielfachheit der Eigenfunktionen höchstens gleich 2 ist.

2.2. Wesentliche Randbedingungen – Rayleighquotient

Definition 2.2.

Die wesentlichen Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} 1.) \quad & \text{für lineare Randbedingungen:} \quad \begin{aligned} \phi(0) &= 0, & \text{falls } \beta &= 0; \\ \phi(L) &= 0, & \text{falls } \delta &= 0. \end{aligned} \\ 2.) \quad & \text{für periodische Randbedingungen:} \quad \phi(0) = \phi(L). \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

Diese wesentlichen Randbedingungen entstehen dadurch, da man aus den Randbedingungen möglichst viele Bedingungen ableitet, die keine Ableitungen enthalten.⁰

Definition 2.3.

Für lineare Randbedingungen definiert man

$$\mathcal{H}[\phi, \psi] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma p(L)\phi(L)\psi(L)/\delta, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta \neq 0; \\ -\alpha p(0)\phi(0)\psi(0)/\beta, & \text{falls } \beta \neq 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma p(L)\phi(L)\psi(L)/\delta - \alpha p(0)\phi(0)\psi(0)/\beta, & \text{falls } \beta \neq 0, \quad \delta \neq 0. \end{cases} \quad (2.2-2)$$

und für periodische Randbedingungen $\mathcal{H}[\phi, \psi] = 0$.

Weiters setzen wir $H[\phi] := \mathcal{H}[\phi, \phi]$.

Damit hat man

$$\mathcal{H}[\phi, \psi] = \mathcal{H}[\psi, \phi], \quad \text{sowie} \quad (2.2-3)$$

$$H[\phi + \psi] = H[\phi] + 2\mathcal{H}[\phi, \psi] + H[\psi]. \quad (2.2-4)$$

Gelten zusätzlich für ϕ die wesentlichen Randbedingungen sowie für ψ die linearen oder die periodischen Randbedingungen, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\mathcal{H}[\phi, \psi] = -p\phi\psi' \Big|_0^L. \quad (2.2-5)$$

Wir haben obige Darstellung gewählt, da sie keine Ableitungen enthält, d.h. nur die wesentlichen Teile der Randbedingungen benützt.

⁰ vgl. Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §1 2.14 (b) p217f.

Definition 2.4.

Die Menge der zulässigen Funktionen Z ist die Menge der auf $[0, L]$ definierten, stetigen und dort auch stückweise stetig differenzierbaren Funktionen, die zusätzlich die wesentlichen Randbedingungen erfüllen.

Damit können wir den Rayleighquotienten definieren; er wird uns eine weitere Möglichkeit geben, die Eigenwerte zu bestimmen.

Definition 2.5.

Für Funktionen $\phi \in Z$ definiert man den Rayleighquotienten durch

$$R[\phi] = \frac{\int_0^L p\phi'^2 + q\phi^2 dx + H[\phi]}{\int_0^L \phi^2 \rho dx}. \quad (2.2-6)$$

Ist nun ϕ Eigenfunktion von (SL) zum Eigenwert λ , so ist ϕ als Lösung der Differentialgleichung zweimal stetig differenzierbar. Wir erhalten durch partielle Integration und anschliessendem Einsetzen der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} \int_0^L p\phi'^2 + q\phi^2 dx + H[\phi] &= p\phi\phi' \Big|_0^L + \int_0^L -(p\phi')'\phi + q\phi^2 dx + H[\phi] \\ &= - \int_0^L \phi L\phi dx = \lambda \int_0^L \phi^2 \rho dx. \end{aligned}$$

Satz 2.4.

Ist ϕ Eigenfunktion zum Eigenwert λ , so gilt $\lambda = R[\phi]$.

Damit können wir die Nichtnegativität der Eigenwerte unter gewissen Randbedingungen zeigen.

Satz 2.5.

Es sei ϕ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ von (SL) , dann gilt

- 1.) Falls physikalische Randbedingungen gegeben sind, so gilt $\lambda \geq 0$.
0 ist Eigenwert genau dann wenn $\alpha = \gamma = 0$ und $q \equiv 0$.
- 2.) Falls periodische Randbedingungen gegeben sind, so ist $\lambda \geq 0$ und
0 ist Eigenwert falls $q \equiv 0$.

Zum Beweis dieser Aussage stellen wir zunächst fest, da für physikalische bzw. periodische Randbedingungen $H \geq 0$ gilt; damit folgt aber nach Satz 2.4

$$\lambda = \frac{\int_0^L p\phi'^2 + q\phi^2 dx + H[\phi]}{\int_0^L \phi^2 \rho dx} \geq 0.$$

Ist $\lambda = 0$, so folgt $\int_0^L p\phi'^2 + q\phi^2 dx + H[\phi] = 0$. Wegen $p > 0$, $q \geq 0$ und $H[\phi] \geq 0$ folgt weiters $\phi' \equiv 0$, also $\phi = \text{const}$ für $\lambda = 0$. $\phi = \text{const}$ erfüllt genau dann die Differentialgleichung, wenn $q \equiv 0$. Setzt man weiters die Randbedingungen ein, so ergeben nur die physikalischen Randbedingungen mit $\alpha = \gamma = 0$ und die periodischen Randbedingungen eine nichtverschwindende Eigenfunktion. $\square$

Satz 2.6.

Für den Fall physikalischer bzw. periodischer Randbedingungen gilt folgendes Minimierungsprinzip für die Eigenwerte

$$\lambda_n = \min_{\substack{\phi \in Z \\ \forall j < n, \phi \perp \phi_j}} \frac{\int_0^L p\phi'^2 + q\phi^2 dx + H[\phi]}{\int_0^L \phi^2 \rho dx}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2-7)$$

Die Funktion ϕ_n , für die das Minimum eintritt, ist dann selbst zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung mit physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen.

Als Folgerung erhält man, da es unendlich viele Eigenwerte gibt.

Man findet dieses Ergebnis etwa in Kamke⁰. Da laut Satz 2.5 unter den gegebenen Voraussetzungen $R[\phi] \geq 0$ gilt, existiert $\mu := \inf R[\phi]$. Die wesentliche Schwierigkeit beim Beweis des Satzes besteht nun darin zu zeigen, da es ein ψ in Z gibt, für das $R[\psi] = \mu$ gilt und, da dieses ψ schon zweimal stetig differenzierbar ist. Hat man dies, so kann man wie in Weinberger⁰ vorgehen.

Es sei dazu χ eine Funktion aus Z , die für alle $j < n$ orthogonal auf ϕ_j steht, dann ist auch $\psi + \epsilon\chi$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}$ aus Z . Die Funktion $\epsilon \mapsto R[\psi + \epsilon\chi]$ ist differenzierbar und nimmt wegen $R[\psi] \leq R[\psi + \epsilon\chi]$ für $\epsilon = 0$ ein Minimum an. Daher folgt wegen $H[\psi + \epsilon\chi] = H[\psi] + 2\epsilon\mathcal{H}[\psi, \chi] + \epsilon^2 H[\chi]$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} \left(R[\psi + \epsilon\chi] \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\int_0^L p(\psi' + \epsilon\chi')^2 + q(\psi + \epsilon\chi)^2 dx + H[\psi] + 2\epsilon\mathcal{H}[\psi, \chi] + \epsilon^2 H[\chi]}{\int_0^L (\psi + \epsilon\chi)^2 \rho dx} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= 2 \cdot \frac{\int_0^L p\psi'\chi' + q\psi\chi dx + \mathcal{H}[\psi, \chi]}{\int_0^L \psi^2 \rho dx} - 2 \cdot \frac{\left(\int_0^L p\psi'^2 + q\psi^2 dx + H[\psi] \right) \cdot \left(\int_0^L \psi\chi\rho dx \right)}{\left(\int_0^L \psi^2 \rho dx \right)^2}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} \int_0^L \psi^2 \rho dx$ und Einsetzen von

$$\mu = R[\psi] = \frac{\int_0^L p\psi'^2 + q\psi^2 dx + H[\psi]}{\int_0^L \psi^2 \rho dx},$$

erhalten wir

$$\int_0^L p\psi'\chi' + q\psi\chi dx + \mathcal{H}[\psi, \chi] - \mu \int_0^L \psi\chi\rho dx = 0.$$

Da ψ zweimal stetig differenzierbar ist, kann man partiell integrieren; wir erhalten so, wenn wir alle Integrale zusammenfassen

$$\int_0^L \left(-(p\psi')' + q\psi - \mu\rho\psi \right) \chi dx + p\chi\psi' \Big|_0^L + \mathcal{H}[\psi, \chi] = 0.$$

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §3 9.4 p267ff.

⁰ Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. VII 36. p160ff.

Da χ eine beliebige Störung der minimierenden Funktion ψ war, folgt aufgrund des Lemmas der Variationsrechnung, da schon

$$(p\psi')' - q\psi + \mu\rho\psi = 0; \text{ sowie} \\ \forall \chi \in Z : \quad \mathcal{H}[\psi, \chi] + p\chi\psi' \Big|_0^L = 0.$$

gelten mu. Laut erster Gleichung erfüllt $\phi_n := \psi$ die Eigenwertgleichung zum Eigenwert $\lambda_n := \mu$. Aus der zweiten Bedingung werden wir noch die Randbedingungen ableiten. Bei $\beta = 0$ ist die linke Randbedingung gleich der entsprechenden wesentlichen Randbedingung und bei $\delta = 0$ die Rechte; für $\beta = \delta = 0$ sind also die gegebenen Randbedingungen identisch mit den wesentlichen Randbedingungen. Weiters stimmt bei den periodischen Randbedingungen die erste Bedingung mit der entsprechenden wesentlichen Randbedingung überein.

Durch Einsetzen der Definition von $\mathcal{H}$ und mit Hilfe der wesentlichen Randbedingungen für $\psi, \chi \in Z$ erhalten wir

$$0 = \mathcal{H}[\psi, \chi] + p\chi\psi' \Big|_0^L = \begin{cases} \gamma p(L)\psi(L)\chi(L) + p(L)\chi(L)\psi'(L), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha p(0)\psi(0)\chi(0) - p(0)\chi(0)\psi'(0), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma p(L)\psi(L)\chi(L) - \alpha p(0)\psi(0)\chi(0) + \\ p(L)\chi(L)\psi'(L) - p(0)\chi(0)\psi'(0), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1; \\ p(L)\chi(0)\psi'(L) - p(0)\chi(0)\psi'(0), & \text{bei per. Rb.} \end{cases}$$

Wir haben also $\forall \chi \in Z$:

$$0 = \begin{cases} p(L)\chi(L)(\gamma\psi(L) + \delta\psi'(L)), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -p(0)\chi(0)(\alpha\psi(0) + \beta\psi'(0)), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ p(L)\chi(L)(\gamma\psi(L) + \delta\psi'(L)) \\ -p(0)\chi(0)(\alpha\psi(0) + \beta\psi'(0)), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1; \\ \chi(0)(p(L)\psi'(L) - p(0)\psi'(0)), & \text{bei per. Rb.} \end{cases}$$

Da nun $p > 0$ und $\chi \in Z$ beliebig ist, gelten für ψ zusätzlich folgende Randbedingungen

$$0 = \begin{cases} \gamma\psi(L) + \delta\psi'(L), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ \alpha\psi(0) + \beta\psi'(0), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \alpha\psi(0) + \beta\psi'(0) \text{ und } \gamma\psi(L) + \delta\psi'(L), & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1; \\ p(0)\psi'(0) - p(L)\psi'(L), & \text{bei per. Rb.} \end{cases}$$

Zusammen mit den wesentlichen Randbedingungen sind das gerade die gegebenen Randbedingungen.

Beachte, bei der Schwingungsgleichung kann man obige Rechnung dazu benützen, um zu zeigen, da die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung, die wir ja aus Kapitel 1.2 bereits kennen, den Rayleighquotienten extremal machen. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(R[\phi_n + \epsilon\chi] \right) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{\int_0^L ((p\phi_n')' - q\phi_n + \mu\rho\phi_n)\chi \, dx}{\int_0^L \phi_n^2 \rho \, dx}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber aufgrund der Differentialgleichung.

Im Beweis des Satzes 2.5 haben wir 0 als untere Schranke für den Rayleighquotienten erhalten. Wenn man aus anderen Überlegungen, da das Spektrum der Eigenwerte nach unten hin beschränkt ist (so z.B.: bei der Schwingungsgleichung, dort treten höchstens zwei negative Eigenwerte auf), so kann man den eben gezeigten Satz analog beweisen.

In obigem Satz haben wir festgestellt, da es unendlich viele Eigenwerte gibt; im folgenden Kapitel werden wir feststellen, da es aber auch nur abzählbar viele sein können.

æ

3. Allgemeine Fourierreihen – Greensche Funktion

3.1. Fourierreihen - Greensche Funktion

In den ersten beiden Kapiteln haben wir die Existenz, sowie einige Eigenschaften der Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Randwertprobleme untersucht. Wir haben festgestellt, da die Eigenfunktionen ein orthogonales Funktionensystem bilden. Daher kann man beliebige Funktionen nach diesen orthogonalen Funktionen entwickeln. In diesem Kapitel interessieren wir uns für die Konvergenz solcher Reihen.

Wir haben das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{2,\rho} = \int_0^L f g \rho \, dx. \quad (3.1-1)$$

sowie die dazugehörige Norm

$$\|f\|_{2,\rho}^2 = \int_0^L f^2 \rho \, dx. \quad (3.1-2)$$

Damit können wir nun die Fourierreihen definieren.

Definition 3.1.

Ist $f \in L_\rho^1[0, L]$, so ist die Fourierreihe von f definiert durch

$$\begin{aligned} f &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \phi_n; \\ c_n(f) &= \frac{\langle f, \phi_n \rangle_{2,\rho}}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2}. \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

Mit S_N bezeichnen wir die N -te Partialsumme $\sum_{n=1}^N c_n(f) \phi_n$.

Um der Definition der Fourierkoeffizienten eine geometrische Interpretation zu geben, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\|f - S_N\|_{2,\rho}^2 &= \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 = \left\langle f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n, f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\rangle_{2,\rho} \\
&= \langle f, f \rangle_{2,\rho} - \sum_{n=1}^N c_n \langle f, \phi_n \rangle_{2,\rho} - \sum_{n=1}^N c_n \langle \phi_n, f \rangle_{2,\rho} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \langle \phi_n, \phi_m \rangle_{2,\rho} \\
&= \|f\|_{2,\rho}^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n \langle f, \phi_n \rangle_{2,\rho} + \sum_{n=1}^N c_n^2 \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \\
&= \|f\|_{2,\rho}^2 + \sum_{n=1}^N \left(c_n \|\phi_n\|_{2,\rho} - \frac{\langle f, \phi_n \rangle_{2,\rho}}{\|\phi_n\|_{2,\rho}} \right)^2 - \sum_{n=1}^N \frac{\langle f, \phi_n \rangle_{2,\rho}^2}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2}.
\end{aligned} \tag{3.1-4}$$

Es gilt also

Satz 3.1.

Die Fourierkoeffizienten von f sind jene Zahlen $c_1, \dots, c_N$, die den Abstand $\|f - S_N\|_{2,\rho}$ minimieren; die Fourierreihe ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{2,\rho}$ die bestmögliche Approximation an f . Weiters gilt für den mittleren quadratischen Approximationsfehler

$$\|f - S_N\|_{2,\rho}^2 = \|f\|_{2,\rho}^2 - \sum_{n=1}^N c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2. \tag{3.1-5}$$

Unmittelbar daraus kann man die Besselungleichung ablesen.

Satz 3.2. (Besselungleichung)

Für die Fourierkoeffizienten c_n von f gilt

$$\sum_{n=1}^N c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \leq \|f\|_{2,\rho}^2. \tag{3.1-6}$$

Als nächsten Schritt führen wir die Greensche Funktion ein, mit deren Hilfe wir zeigen werden, dass es beliebig große Eigenwerte gibt.

Definition 3.2.

Die Greensche Funktion $G : [0, L] \times [0, L] \rightarrow [0, L] : (x, \xi) \mapsto G(x, \xi)$ des Differentialoperators $L_x = \frac{d}{dx}(p \frac{d}{dx}) - q$ und der linearen bzw. periodischen Randbedingungen ist, falls existent, durch folgende 5 Bedingungen gegeben

$$\begin{aligned}
1.) \quad & \forall x \neq \xi : \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial G}{\partial x} \right) - qG = 0; \\
2.) \quad & G(x, \xi) = G(\xi, x); \\
3.) \quad & \lim_{x \searrow \xi} G(x, \xi) = \lim_{x \nearrow \xi} G(x, \xi); \\
4.) \quad & \lim_{x \searrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) - \lim_{x \nearrow \xi} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) = \frac{-1}{p(\xi)}; \\
5.) \quad & G \text{ erfüllt als Funktion von } x \text{ die Randbedingungen.}
\end{aligned} \tag{3.1-7}$$

Die Symmetrie der Greenschen Funktion gilt nur bei selbstadjungierten Randwertproblemen. Als Grundeigenschaft der Greenschen Funktion können wir folgenden Satz notieren.

Satz 3.3.

Existiert die Greensche Funktion G zu $L_x = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) - q$ und linearen bzw. periodischen Randbedingungen, dann ist das Randwertproblem $L_x y = -f$ zu denselben Randbedingungen eindeutig lösbar und es gilt für die Lösung

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (3.1-8)$$

Ist andererseits das Problem $L_x y = -f$ für beliebige stetige f zu linearen bzw. periodischen Randbedingungen eindeutig lösbar, so existiert zu L_x mit denselben Randbedingungen genau eine Greensche Funktion.

Man findet dieses Ergebnis etwa in Gröbner⁰ oder in Kamke⁰. Weiters gilt der Zusammenhang mit den Eigenwertproblemen

Satz 3.4.

Die Greensche Funktion G zum Differentialoperator $L_x = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) - q$ existiert genau dann, wenn das Eigenwertproblem $L_x y + \lambda y = 0$ nicht den Eigenwert 0 hat.

Existiert die Greensche Funktion, so gilt für die Eigenfunktion ϕ zum Eigenwert λ wegen $L_x \phi = -\lambda \phi$

$$\phi(x) = \lambda \int_0^L G(x, \xi) \phi(\xi) \rho(\xi) d\xi. \quad (3.1-9)$$

Wäre nun 0 ein Eigenwert, so müte $\phi \equiv 0$ gelten. Ist andererseits ϕ Eigenfunktion zum Eigenwert 0, so hat das Problem $L_x y = -f$ keine oder unendlich viele Lösungen, denn mit y ist auch $y + \phi$ eine Lösung, weshalb laut Eindeutigkeitsaussage aus vorigem Satz keine Greensche Funktion existieren kann. $\square$

Bei physikalischen oder periodischen Randbedingungen gilt immer, da $\lambda \geq 0$ ist. Ist nun $\lambda = 0$ ein Eigenwert so schreibe das Problem etwas um

$$L_x + \lambda \rho = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) - (q + \rho) + (\lambda + 1) \rho.$$

Man erhält wieder ein Sturm-Liouvillesches Problem mit $\tilde{q} = q + \rho > 0$ und $\tilde{\lambda} = \lambda + 1$, das aber jetzt laut Satz 2.5 nur mehr echt positive Eigenwerte hat. In analoger Weise kann man bei einem nach unten beschränkten Spektrum vorgehen. Es sei dazu $\forall \lambda : \lambda > -M$, $M \geq 0$ dann hat man

$$L_x + \lambda \rho = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) - (q + M\rho) + (\lambda + M)\rho. \quad (3.1-10)$$

also $\tilde{q} = q + M\rho > 0$ und $\tilde{\lambda} = \lambda + M > 0$, und somit wieder nur positive Eigenwerte. Eine andere Möglichkeit den Eigenwert 0 zuzulassen wäre, bei dessen Auftreten statt der gewöhnlichen Greenschen Funktion von oben, die verallgemeinerte Greensche Funktion⁰ zu verwenden. Wir beschränken uns daher auf den Fall, da 0 kein Eigenwert ist, soda nach letztem Satz die Greensche Funktion existiert.

⁰ Gröbner, W.: Differentialgleichungen, Erster Teil: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kap. III §1 p107ff.

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §1 1.5, 1.6 p188ff.

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §1 1.7 p190ff.

Will man die Greensche Funktion konstruieren, so wähle man für den Differentialoperator L_x ein Fundamentalsystem von Lösungen v_1, v_2 , d.h.: $L_x v_i = 0$, $i = 1, 2$ sowie $v_i(0) = \delta_{i,1}$, $v_i'(0) = \delta_{i,2}$, $i = 1, 2$ und setze die Greensche Funktion in der Form

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)v_1(x) + c_2(\xi)v_2(x), & \text{falls } x < \xi; \\ c_3(\xi)v_1(x) + c_4(\xi)v_2(x), & \text{falls } \xi < x. \end{cases} \quad (3.1-11)$$

an. Die unbekannten Funktionen $c_i(\xi)$ lassen sich durch Einsetzen des Ansatzes in die restlichen 4 Bestimmungsgleichungen ermitteln. Es sei dazu im folgenden

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}. \quad (3.1-12)$$

Differenziert man $p(x)W(x)$ nach x , so erhält man sofort mit Hilfe von $L_x v_i = 0$, $i = 1, 2$, da $p(x)W(x)$ konstant ist; also

$$p(x)W(x) = p(0)\left(v_1(0)v_2'(0) - v_2(0)v_1'(0)\right) = p(0). \quad (3.1-13)$$

Damit erhalten wir aus der in Gröbner⁰ angegebenen expliziten Darstellung der Greenschen Funktion für lineare Randbedingungen

$$G(x, \xi) = \frac{-1}{Ap(0)} \begin{cases} \beta b_2 v_1(x)v_1(\xi) - \beta b_1 v_1(x)v_2(\xi) \\ -\alpha b_2 v_2(x)v_1(\xi) + \alpha b_1 v_2(x)v_2(\xi), & \text{falls } 0 \leq x \leq \xi \leq L; \\ \beta b_2 v_1(x)v_1(\xi) - \alpha b_2 v_1(x)v_2(\xi) \\ -\beta b_1 v_2(x)v_1(\xi) + \alpha b_1 v_2(x)v_2(\xi), & \text{falls } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.1-14)$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma v_1(L) + \delta v_1'(L); \\ b_2 &= \gamma v_2(L) + \delta v_2'(L). \end{aligned} \quad \text{und} \quad A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (3.1-15)$$

Für periodische Randbedingungen hat man

$$G(x, \xi) = \frac{-1}{A} \begin{cases} b_1 v_1(x)v_2(\xi) + b_2 v_1(x)v_2(\xi) \\ +b_3 v_2(x)v_1(\xi) + b_4 v_2(x)v_2(\xi), & \text{falls } 0 \leq x \leq \xi \leq L; \\ b_1 v_1(x)v_1(\xi) + b_3 v_1(x)v_2(\xi) \\ +b_2 v_2(x)v_1(\xi) + b_4 v_2(x)v_2(\xi), & \text{falls } 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.1-16)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} b_1 &= p(0)v_2(L); \\ b_2 &= p(0)(1 - v_1(L)); \\ b_3 &= p(L)v_2'(L) - p(0); \\ b_4 &= -p(L)v_1'(L). \end{aligned} \quad \text{und} \quad A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.1-17)$$

Ein Nachschlagwerk für Greensche Funktionen ist etwa Butkovskiy⁰; dort findet man auf den Seiten 26-52 tabellarisch Greensche Funktionen für Differentialgleichungen 2-ter Ordnung angeführt.

⁰ Gröbner, W.: Differentialgleichungen, Erster Teil: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Kap. III §10 5. p167f.

⁰ Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook.

3.2. Konvergenz im quadratischen Mittel

Es sei nun G die Greensche Funktion zum Differentialoperator L_x ; nach (3.1–8) haben wir

$$\frac{\phi_n(x)}{\lambda_n} = \int_0^L G(x, \xi) \phi_n(\xi) \rho(\xi) d\xi = c_n(G(x, \cdot)) \|\phi_n\|_{2, \rho}^2.$$

Da die Funktion $\xi \mapsto G(x, \xi)$ laut Konstruktion stetig ist, also in $L_\rho^1[0, L]$ liegt, folgt mit Hilfe der Besselungleichung

$$\sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n^2 \|\phi_n\|_{2, \rho}^2} \leq \int_0^L G^2(x, \xi) \rho(\xi) d\xi.$$

Multiplikation mit $\rho(x)$ und Integration von 0 bis L liefert

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \int_0^L \int_0^L G^2(x, \xi) \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi.$$

Da die rechte Seite nicht von N abhängt erhalten wir

$$\sum_{\substack{\lambda \\ \text{Eigenwert}}} \frac{1}{\lambda^2} \leq \int_0^L \int_0^L G^2(x, \xi) \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi.$$

Das Doppelintegral ergibt aufgrund der Stetigkeit von G auf der kompakten Menge $[0, L] \times [0, L]$ einen endlichen Wert, womit die linksstehende Summe konvergiert. Laut Pietsch⁰ haben konvergente Summen höchstens abzählbar viele von 0 verschiedene Summanden. Es hat also die Summe über die reziproken Quadrate der Eigenwerte höchstens abzählbar viele Summanden. Andererseits gibt es nach Satz 2.6 mindestens unendlich viele Eigenwerte. Zusammen ergibt das, da es genau abzählbar viele Eigenwerte gibt. Weiters folgt aus der Konvergenz der Reihe, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

gilt, womit sich der nachfolgende Satz ergibt.

Satz 3.5.

Für (SL) mit physikalischen Randbedingungen gilt, da es unendlich viele Eigenwerte gibt. Alle Eigenwerte sind nichtnegativ, reell, einfach und lassen sich als eine streng monoton gegen $+\infty$ wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ schreiben.

Für periodische Randbedingungen gibt es ebenfalls unendlich viele Eigenwerte. Alle Eigenwerte sind nichtnegativ, reell und lassen sich als zwei streng monoton gegen $+\infty$ wachsende Folgen $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ und $\bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_3 < \dots$, für die $\lambda_n \leq \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$ gilt, schreiben. Ist $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, so ist diese Zahl ein doppelter Eigenwert, ansonsten sind beide Zahlen einfache Eigenwerte.

Dieser Satz ermöglicht uns die Konvergenz im quadratischen Mittel zu zeigen, welche äquivalent zur Vollständigkeit der Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Eigenwertprobleme ist.

⁰ Pietsch, A.: Nuclear Locally Convex Spaces, chap. I 1.1 prop. 1.1.5 p21.

Vorerst sei $f \in Z$, dann ergibt sich aufgrund der Orthogonalität der Eigenfunktionen $\forall m \leq N$:

$$\langle f - S_N, \phi_m \rangle_{2,\rho} = \langle f, \phi_m \rangle_{2,\rho} - \sum_{n=1}^N c_n \langle \phi_n, \phi_m \rangle_{2,\rho} = \langle f, \phi_m \rangle_{2,\rho} - c_m \|\phi_m\|_{2,\rho}^2 = 0.$$

Nach Satz 2.6 folgt

$$\begin{aligned} \lambda_{N+1} &\leq R \left[f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right] \\ &= \frac{\int_0^L p \left(f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right)'^2 + q \left(f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right)^2 dx + H \left[f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right]}{\int_0^L \left(f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right)^2 \rho dx}. \end{aligned}$$

Für physikalische oder periodische Randbedingungen sind nach Satz 2.5 alle Eigenwerte nichtnegativ und höchstens der erste Eigenwert kann verschwinden. Daher können wir durch λ_{N+1} dividieren

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p \left(f' - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n' \right)^2 + q \left(f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right)^2 dx + H \left[f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right] \right); \\ &= \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx - 2 \sum_{n=1}^N c_n \int_0^L p \phi_n' f' + q \phi_n f dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \int_0^L p \phi_n' \phi_m' + q \phi_n \phi_m dx + H \left[f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right] \right). \end{aligned}$$

Da die Eigenfunktionen Sturm-Liouvillescher Probleme zweimal stetig differenzierbar sind, können wir partiell integrieren.

$$\begin{aligned} \int_0^L p \phi_n' f' + q \phi_n f dx &= p f \phi_n' \Big|_0^L - \int_0^L ((p \phi_n')' - q \phi_n) f dx; \\ \int_0^L p \phi_n' \phi_m' + q \phi_n \phi_m dx &= p \phi_m \phi_n' \Big|_0^L - \int_0^L ((p \phi_n')' - q \phi_n) \phi_m dx. \end{aligned}$$

Die Funktionen f, ϕ_m erfüllen die wesentlichen Randbedingungen, ϕ_n die gegebenen Randbedingungen; es ergibt sich daher mit Hilfe der Beziehung (2.2–5) und der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \int_0^L p \phi_n' f' + q \phi_n f dx &= -\mathcal{H}[f, \phi_n] + \lambda_n \int_0^L f \phi_n \rho dx = -\mathcal{H}[f, \phi_n] + \lambda_n c_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2; \\ \int_0^L p \phi_n' \phi_m' + q \phi_n \phi_m dx &= -\mathcal{H}[\phi_m, \phi_n] + \lambda_n \int_0^L \phi_m \phi_n \rho dx = -\mathcal{H}[\phi_m, \phi_n] + \lambda_n \delta_{n,m} \|\phi_n\|_{2,\rho}^2. \end{aligned}$$

Weiters haben wir nach (2.2–3) und (2.2–4)

$$H \left[f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right] = H[f] - 2 \sum_{n=1}^N c_n \mathcal{H}[f, \phi_n] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \mathcal{H}[\phi_n, \phi_m].$$

Einsetzen obiger Gleichungen ergibt uns

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx - 2 \sum_{n=1}^N c_n \left(-\mathcal{H}[f, \phi_n] + \lambda_n c_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \left(-\mathcal{H}[\phi_m, \phi_n] + \lambda_n \delta_{n,m} \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + H[f] - 2 \sum_{n=1}^N c_n \mathcal{H}[f, \phi_n] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n c_m \mathcal{H}[\phi_m, \phi_n] \right). \end{aligned}$$

Wir haben somit

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n^2 \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right).$$

Wegen Satz 2.5 sind bei physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen alle Eigenwerte nicht-negativ, weshalb sich letzte Gleichung weiter zu

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] \right). \quad (3.2-1)$$

vereinfachen lät.

Aufgrund der Stetigkeit von $f \in Z$ auf $[0, L]$, ist $H[f] < \infty$ und da f sogar stückweise stetig differenzierbar ist, gilt auch $\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx < \infty$. Da laut Satz 3.5 die Eigenwerte für $n \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen $+\infty$ streben, haben wir die Konvergenz im quadratischen Mittel für Funktionen $f \in Z$.

Ist nun $f \in L_\rho^2[0, L]$, so kann f beliebig gut durch ein $f_\epsilon \in Z$ approximiert werden, genauer $\forall \epsilon > 0 \exists f_\epsilon \in Z : \|f - f_\epsilon\|_{2,\rho} < \epsilon/2$. Laut erstem Teil des Beweises gilt $\exists N_0 : \forall N > N_0 \|f_\epsilon - \sum_{n=1}^N c_n(f_\epsilon) \phi_n\|_{2,\rho} < \epsilon/2$. Nach (3.1–4) sind die $c_n(f)$ die beste Wahl der Fourierkoeffizienten und es folgt

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N c_n(f) \phi_n \right\|_{2,\rho} \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n(f_\epsilon) \phi_n \right\|_{2,\rho} \leq \|f - f_\epsilon\|_{2,\rho} + \left\| f_\epsilon - \sum_{n=1}^N c_n(f_\epsilon) \phi_n \right\|_{2,\rho} \leq \epsilon.$$

Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ liefert folgenden Satz.

Satz 3.6.

Sind ϕ_n , $n \in \mathbb{N}$ die Eigenfunktionen von (SL) zu physikalischen oder periodischen Randbedingungen, so gilt für Funktionen $f \in L_\rho^2[0, L]$ und den, wie in (3.1–3) definierten, Fourierkoeffizienten $c_n(f)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^L \left(f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right)^2 \rho dx = 0. \quad (3.2-2)$$

d.h.: die Eigenfunktionen von (SL) bilden ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem.

Dieses Ergebnis gilt auch für nach unten beschränkte Spektren. Wegen Gleichung (3.1–10) werden auch in diesem Fall die Eigenwerte, gemäß Satz 3.5, für $n \rightarrow \infty$ beliebig gro. Ist nun n_0 der kleinste Index derart, da $\lambda_{n_0} > 0$ ist, so erhält man $\forall N \geq n_0 - 1$ wie in obigem Beweis die Abschätzung

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|_{2,\rho}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] + \sum_{n=1}^{n_0-1} |\lambda_n| c_n^2 \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right).$$

Daraus erhält man wie im Beweis des Satzes die Konvergenz im quadratischen Mittel.

Satz 3.7. (Bilinearform der Parsevalgleichung)

Sind $f, g \in L_\rho^2[0, L]$ so gilt:

Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen von (SL) ist äquivalent zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) c_n(g) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \langle f, g \rangle_{2,\rho}. \quad (3.2-3)$$

Aus (3.1–5) erhält man sofort die Parsevalgleichung.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \|f\|_{2,\rho}^2. \quad (3.2-4)$$

Sind $f, g \in L_\rho^2[0, L]$, so gilt das laut Minkowskiungleichung auch für $f \pm g$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f \pm g\|_{2,\rho}^2 \pm 2 \langle f, g \rangle_{2,\rho} + \|g\|_{2,\rho}^2 &= \|f \pm g\|_{2,\rho}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f \pm g) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^2(f) \pm 2c_n(f)c_n(g) + c_n^2(g)) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich die Behauptung. Umgekehrt erhält man die Parsevalgleichung durch Gleichsetzen von f und g aus der Bilinearform. $\square$

Ist nun f auf $[0, L]$ zweimal stetig differenzierbar und erfüllt physikalische bzw. periodische Randbedingungen, so ergibt sich mittels zweimaliger partieller Integration und der Selbstadjungiertheit von (SL)

$$\int_0^L \frac{1}{\rho} ((pf')' - qf) \phi_n \rho \, dx = p(\phi_n f' - f \phi_n') \Big|_0^L + \int_0^L ((p\phi_n')' - q\phi_n) f \, dx = -\lambda_n \int_0^L f \phi_n \rho \, dx.$$

Für zweimal stetig differenzierbare f , die die Randbedingungen erfüllen gilt

$$c_n \left(\frac{1}{\rho} ((pf')' - qf) \right) = -\lambda_n c_n(f). \quad (3.2-5)$$

Mit der Bilinearform der Parsevalgleichung für f und $g := ((pf')' - qf)/\rho$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 &= - \int_0^L \frac{1}{\rho} ((pf')' - qf) f \rho \, dx = -pf f' \Big|_0^L + \int_0^L p f'^2 + q f^2 \, dx \\ &= \int_0^L p f'^2 + q f^2 \, dx + H[f]. \end{aligned}$$

Ist f nur stetig auf $[0, L]$ und erfüllt $\int_0^L p f'^2 + q f^2 \, dx < \infty$, so kann f bezüglich $\|\cdot\|_{2,\rho}$ beliebig gut durch ein $g \in \mathcal{C}^2[0, L]$ approximiert werden, soda obige Gleichung erhalten bleibt. Wie beim Beweis der Bilinearform der Parsevalgleichung erhält man daraus folgenden Satz

Satz 3.8.

Es seien $f, g \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L p f'^2 + q f^2 \, dx < \infty$ und $\int_0^L p g'^2 + q g^2 \, dx < \infty$, weiters sollen f, g die wesentlichen Teile⁰ der physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen erfüllen, so gilt für die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (SL) zu denselben Randbedingungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n(f) c_n(g) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \int_0^L p f' g' + q f g \, dx + \mathcal{H}[f, g]. \quad (3.2-6)$$

Die Sätze 3.7 und 3.8 gelten auch im Fall eines nach unten beschränkten Spektrums und werden analog bewiesen.

⁰ vgl.: Def. 2.2

æ

4. Gleichmäßige Konvergenz und Fehlerabschätzung

4.1. Allgemeiner Fall

Satz 4.1.

Für die Greensche Funktion G von $L_x = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) - q$ mit physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen hat man die Bilinearentwicklung

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}. \quad (4.1-1)$$

Zum Beweis dieser Identität definieren wir die zwei Funktionen $f(z) := G(z, x) = G(x, z)$, sowie $g(z) := G(z, \xi) = G(\xi, z)$. Wegen der Stetigkeit von G existieren die Fourierkoeffizienten von f und g und haben nach (3.1-9) die Gestalt

$$c_n(f) = \frac{\phi_n(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad \text{und} \quad c_n(g) = \frac{\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}.$$

Da $G(x, \xi)$ laut Definition bis auf die Gerade $x = \xi$ stetig differenzierbar ist, existieren die Integrale aus Satz 3.8 für f und g . Weiters ist G laut Definition stetig und erfüllt die Randbedingungen; wir können daher letzten Satz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} &= \int_0^L p(z) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \frac{\partial G}{\partial z}(z, \xi) + q(z) G(z, x) G(z, \xi) dz \\ &\quad + \mathcal{H}[G(., x), G(., \xi)]. \end{aligned}$$

Die Funktion $z \mapsto G(z, x)$ ist auf den Intervallen $(0, x)$ und (x, L) laut Konstruktion von G zweimal stetig differenzierbar; wir können also auf diesen Teilintervallen partiell integrieren

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} &= p(z) G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_0^{x-0} + p(z) G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_{x+0}^L \\ &\quad - \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(p(z) \frac{\partial G(z, x)}{\partial z} \right) - q(z) G(z, x) \right) \cdot G(z, \xi) dz + \mathcal{H}[G(., x), G(., \xi)]. \end{aligned}$$

Das Integral fällt weg, da der Integrand aufgrund der Differentialgleichung für G fast überall verschwindet. Weiters kann man $\mathcal{H}$ wegen der Annahme der Randbedingungen mittels (2.2–5) umschreiben

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} &= p(z)G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_0^{x-0} + p(z)G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_{x+0}^L - p(z)G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_0^L \\ &= -p(z)G(z, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_{x-0}^{x+0}. \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von G und der Sprungbedingung von $\partial G/\partial z$ erhält man schließlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} = -p(x)G(x, \xi) \frac{\partial G}{\partial z}(z, x) \Big|_{x-0}^{x+0} = G(x, \xi). \quad \square$$

Wir können nun eine gleichmäßige Fehlerabschätzung berechnen mit deren Hilfe sich die gleichmäßige Konvergenz ergeben wird.

Satz 4.2.

Es seien ϕ_n die Eigenfunktionen und λ_n die Eigenwerte eines Sturm-Liouville Randwertproblems zu physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen. Es gelte $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx < \infty$ und f erfülle die dazugehörigen wesentlichen Randbedingungen, so ergibt sich für die Fourierreihe bezüglich dieser Eigenfunktionen, da sie punktweise, gleichmäßig und im quadratischen Mittel gegen f konvergiert.

Für die N -te Partialsumme gilt die gleichmäßige Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n(f) \phi_n(x) \right| &\leq \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left(G(x, x) - \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\max_{x \in [0, L]} G(x, x) \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.1-2}$$

Mit Hilfe der Cauchy-Bunyakovskii-Schwarzchen Ungleichung (CBS-Ungl.)

$$\left| \sum a_n b_n \right| \leq \left(\sum a_n^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum b_n^2 \right)^{1/2}. \tag{4.1-3}$$

erhält man

$$\left| \sum_{n=N+1}^M c_n(f) \phi_n(x) \right|^2 \leq \left(\sum_{n=N+1}^M \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \cdot \left(\sum_{n=N+1}^M \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \right). \tag{4.1-4}$$

Wegen der Positivität der Eigenwerte und der Stetigkeit von $G(x, x)$ auf $[0, L]$ ist

$$\sum_{n=N+1}^M \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} = G(x, x) \leq C. \tag{4.1-5}$$

wobei C eine von x unabhängige Konstante darstellt. Es ergibt sich daher nach Satz 3.8

$$\left| \sum_{n=N+1}^M c_n(f) \phi_n(x) \right|^2 \leq C \cdot \sum_{n=N+1}^M \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \xrightarrow{N,M \rightarrow \infty} 0.$$

und zwar unabhängig von x . Das ist gerade die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe. Die Konvergenz im quadratischen Mittel haben wir schon im Satz 3.6 festgestellt. Es bleibt noch die punktweise Konvergenz sowie die Fehlerabschätzung zu zeigen.

Die Eigenfunktionen ϕ_n sind als Lösungen der Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, L]$ und daher sogar gleichmäßig stetig. Damit ist aber die Funktion $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \phi_n(x)$ ebenfalls gleichmäßig stetig. Wäre nun für ein $x_0 \in [0, L]$, $f(x_0) \neq s(x_0)$, so wäre wegen der Stetigkeit von f und s

$$\int_0^L (f - s)^2 \rho dx > 0.$$

was im Widerspruch zur Konvergenz im quadratischen Mittel steht. Es ist also punktweise

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \phi_n(x).$$

Für die Fehlerabschätzung bilden wir in (4.1–4) den Grenzübergang M gegen unendlich.

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n(f) \phi_n(x) \right|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \cdot \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \right) \\ &= \left(\int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \\ &\quad \cdot \left(G(x, x) - \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \right). \end{aligned}$$

Die zweite Fehlerabschätzung ergibt sich mit Hilfe von

$$G(x, x) - \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq G(x, x) \leq \max_{x \in [0, L]} G(x, x). \quad \square$$

Die Behauptung des Satzes bleibt erhalten, wenn man allgemeine lineare Randbedingungen hat und wei, da das Spektrum nach unten hin beschränkt ist und die Greensche Funktion zu L mit q und λ existiert. Existiert diese nicht, so mu man, wie in (3.1–10) dargelegt, zu L mit $\tilde{q} = q + M\rho$ und $\tilde{\lambda} = \lambda + M$ übergehen.

Der Beweis erfolgt im wesentlichen wie im Satz 4.2. Man wählt N so gro, da λ_{N+1} nichtnegativ ist, dann erhält man statt (4.1–4)

$$\sum_{n=N+1}^M \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} - \sum_{\lambda_n < 0} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} = G(x, x) - \sum_{\lambda_n < 0} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq C. \quad (4.1-6)$$

da ja die rechtsstehende Summe aufgrund des nach unten beschränkten Spektrums nur endlich viele Summanden enthält. Den Rest des Beweises kann man wörtlich übernehmen.

4.2. Logarithmische Ableitungen der Gammafunktion

Speziell für die Schwingungsgleichung mit physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen kann man eine etwas leichter zu berechnende Fehlerabschätzung angeben. Dazu benötigen wir die logarithmischen Ableitungen der Gammafunktion.

Definition 4.1.

Die Gammafunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0; \\ \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots\end{aligned}\tag{4.2-1}$$

Definition 4.2.

Die Psi (Digamma) Funktion ist definiert durch

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \\ \psi^{(n)}(z) &= \frac{d^n}{dz^n} \psi(z) = \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} \ln \Gamma(z).\end{aligned}\tag{4.2-2}$$

Wir werden bei den Fehlerabschätzungen die Ableitungen der Psifunktion für große Argumente benötigen. Deshalb wollen wir hier die asymptotischen Formeln für diese Funktionen angeben. Diese Reihenentwicklungen gelten zwar nicht exakt, doch kann man mit ihrer Hilfe leicht eine recht gute Näherung erhalten, indem man die Reihe abbricht, sobald die erforderliche Genauigkeit erreicht ist.

Die folgenden asymptotischen Formeln findet man etwa in Abramowitz, Stegun⁰.

Satz 4.3.

Die Psi (Digamma) Funktion, sowie ihre Ableitungen haben die asymptotischen Darstellungen

$$\begin{aligned}\psi(z) &\sim \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{B_{2l}}{2l z^{2l}}; \\ \psi^{(n)}(z) &\sim \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{z^n} \cdot \left(1 + \frac{n}{2z} + \sum_{l=1}^{\infty} B_{2l} \binom{2l+n-1}{n-1} \frac{1}{z^{2l}} \right), \quad n = 1, 2, \dots \\ \text{mit } B_2 &= \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{-1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = \frac{-1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \text{usw.} \\ B_n &\quad \text{Bernoulli-Zahlen.}\end{aligned}\tag{4.2-3}$$

Speziell erhalten wir für die ersten paar Ableitungen von $\psi(z)$:

$$\begin{aligned}\psi(z) &\sim \ln(z) - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} + \frac{1}{240z^8} - \frac{1}{132z^{10}} \pm \dots \\ \psi'(z) &\sim \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \frac{1}{42z^7} - \frac{1}{30z^9} + \frac{5}{66z^{11}} \mp \dots \\ \psi''(z) &\sim -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{6z^6} - \frac{1}{6z^8} + \frac{3}{10z^{10}} - \frac{5}{6z^{12}} \pm \dots \\ \psi^{(3)}(z) &\sim \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^7} + \frac{4}{3z^9} - \frac{3}{z^{11}} + \frac{10}{z^{13}} \mp \dots\end{aligned}\tag{4.2-4}$$

⁰ Abramowitz, M., Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, chap. 6.3. p258ff. und chap. 23 table 23.2 p810.

Die Ableitungen der Psifunktion werden wir benützen um bestimmte Reihen zu berechnen. Es gilt nämlich der folgende Satz

Satz 4.4.

Es gilt die Reihendarstellung, sowie die Fehlerabschätzung

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(k+\vartheta)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \psi^{(n)}(N+1+\vartheta) \leq \frac{1}{n(N+\vartheta)^n}; \quad (4.2-5)$$

für $n = 1, 2, \dots$ und $\vartheta \neq -N-1, -N-2, \dots$

Die Reihendarstellung findet man in Abramowitz, Stegun⁰ und die Fehlerabschätzung erhält man leicht mit Hilfe des Integralkriteriums.

Wir werden vorerst die Wurzel der Ableitung der Psifunktion benötigen; deshalb wollen wir auch für sie eine asymptotische Darstellung festhalten. Man erhält sie, wenn man die Wurzel mit der binomischen Reihe entwickelt und die asymptotische Darstellung von ψ' einsetzt.⁰

Satz 4.5.

Die Wurzel der Ableitung der Psifunktion hat folgende asymptotische Darstellung

$$\sqrt{\psi'(z)} \sim \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4z} + \frac{5}{96z^2} - \frac{5}{384z^3} - \frac{1361}{92160z^4} + \frac{179}{40960z^5} \right. \\ \left. + \frac{712003}{61931520z^6} - \frac{816023}{247726080z^7} - \frac{1961286227}{118908518400z^8} + \dots \right). \quad (4.2-6)$$

4.3. Ergebnisse für die Schwingungsgleichung

Die Schwingungsgleichung mit linearen Randbedingungen hat höchstens 2 negative Eigenwerte; ihr Spektrum ist daher nach unten beschränkt, womit die Aussagen des Satzes 4.2 gelten. Die Fehlerabschätzung kann jedoch auch ohne die Greensche Funktion angegeben werden.

Für den ersten Faktor aus (4.1-2) ergibt sich

$$\int_0^L f'^2(x) dx + H[f] - \sum_{\substack{n=-2 \\ n \neq 0}}^N \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2.$$

Wir müssen nur mehr den zweiten Faktor genauer untersuchen. Für ihn gilt aufgrund des Satzes 1.7 für $N \geq 0$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \frac{2}{f(N+1)L} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}.$$

Bei physikalischen Randbedingungen erhält man aufgrund der definierenden Gleichung (1.2-6) und des Satzes 1.4 leicht die Abschätzung

$$\lambda_n \geq (n-1+\vartheta)^2 \cdot \frac{\pi^2}{L^2}. \quad (4.3-1)$$

⁰ Abramowitz, M., Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, chap. 6.4. p260.

⁰ Zur Berechnung dieser Darstellung wurde ein algebraisches Formelmanipulationsprogramm, wie z.B. Reduce oder muMath, verwendet.

wobei $\vartheta = 0$ für $\beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}$ für $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ und $\beta\delta = 0$, sowie $\vartheta = 1$ für $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ zu setzen ist. Damit erhält man

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \frac{2}{L} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{L^2}{(n-1+\vartheta)^2 \pi^2} = \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N+\vartheta). \quad (4.3-2)$$

da ja bei physikalischen Randbedingungen $f(N) = 1$ zu setzen ist. Drückt man noch gemäß Satz 1.6 die Norm der Eigenfunktionen aus, so ergibt das den folgenden Satz

Satz 4.6.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, so erhält man für die Schwingungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen die Aussagen des Satzes 4.2 sowie die Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n(f) \left(\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x \right) \right| \leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N+\vartheta)}. \quad (4.3-3)$$

Falls $\alpha = \gamma = 0$, d.h.: 0 ein Eigenwert ist, so hat die Fourierreihe zusätzlich den Term

$$c_0(f) \phi_0(x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Für ϑ erhalten wir

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (4.3-4)$$

Für die restlichen Randbedingungen gilt nach Satz 1.4

In jedem Intervall $[(n-1)\pi/L, n\pi/L]$ gibt es höchstens 3 Eigenwerte

und man erhält für $N \geq 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \frac{2}{f(N+1)L} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{3L^2}{(n-1)^2 \pi^2} = \frac{6L}{f(N+1)\pi^2} \psi'(N). \quad (4.3-5)$$

Damit können wir nun den letzten Satz für allgemeine lineare Randbedingungen formulieren.

Satz 4.7.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, so erhält man für die Schwingungsgleichung mit linearen Randbedingungen die Aussagen des Satzes 4.2 sowie die Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - \sum_{n=-2}^N c_n(f) \phi_n(x) \right| \leq \frac{L}{\pi} \left(\int_0^L f'^2(x) dx + H[f] - \sum_{\substack{n=-2 \\ n \neq 0}}^N \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \right)^{1/2} \sqrt{\frac{6\psi'(N)}{f(N+1)L}}. \quad (4.3-6)$$

Die Glieder $c_0\phi_0$, $c_{-1}\phi_{-1}$ und $c_{-2}\phi_{-2}$ treten nur dann auf, wenn auch die dazu entsprechenden Eigenwerte existieren.

Satz 4.8.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, so erhält man für die Schwingungsgleichung mit periodischen Randbedingungen die Aussagen des Satzes 4.2 sowie die Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - a_0(f) - \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n(f) \sin \frac{2n\pi x}{L} \right| \leq \left(\frac{L}{2\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N n^2 (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N+1)}. \quad (4.3-7)$$

Man erhält dieses Ergebnis wenn man wie in Satz 4.2 vorgeht und die Ergebnisse von Satz 1.9 einsetzt⁰.

⁰ vgl. auch Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. IV 19. p81ff.

æ

5. Numerische Bemerkungen

In diesem Kapitel wollen wir ein paar Ergebnisse zusammenstellen, die für die numerische Behandlung der besprochenen Größen von Bedeutung sind. Verfahren zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben sind etwa in Keller⁰ beschrieben. Wir wollen uns hier vor allem mit Aussagen grundsätzlicher Natur befassen. Da uns nur die auftretenden Phänomene interessieren, wollen wir die Beweise weglassen.

5.1. Oszillations- und Monotoniesatz, Asymptotische Darstellung

Satz 5.1. (*Oszillationssatz*)

Gegeben sei ein reguläres Sturm-Liouville Randwertproblem mit physikalischen bzw. periodischen Randbedingungen, dann gilt

Bei physikalischen Randbedingungen gibt es unendlich viele Eigenwerte; alle Eigenwerte sind reell und lassen sich als eine monoton gegen $+\infty$ wachsende Folge $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ mit den dazugehörigen Eigenfunktionen $\phi_1, \phi_2, \dots$ schreiben. Alle Eigenfunktionen sind einfach. Die n -te Eigenfunktion hat im offenen Intervall $(0, L)$ genau $n - 1$ Nullstellen.^{0 0}

Bei periodischen Randbedingungen lassen sich die Eigenwerte als zwei gegen $+\infty$ divergierende Folgen $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ sowie $\bar{\lambda}_0 < \bar{\lambda}_1 < \dots$ mit $\lambda_n \leq \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$ schreiben. Falls $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, so ist λ_n ein doppelter Eigenwert, ansonsten ein einfacher Eigenwert. Es seien ϕ_n bzw. $\bar{\phi}_n$ die entsprechenden Eigenfunktionen, dann gilt: ϕ_n bzw. $\bar{\phi}_n$ haben im halboffenen Intervall $(0, L]$ genau $2n$ Nullstellen.⁰

Es zeigt sich, da die Eigenfunktionen mit wachsenden Eigenwerten immer stärker oszillieren. Dies ist vor allem bei der numerischen Berechnung von Integralen über diese Eigenfunktionen zu berücksichtigen. Genauer gilt folgende asymptotische Darstellung

⁰ Keller, H. B.: Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems.

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §3 9.2 (a₁) p260.

⁰ Falls $\phi(0) = 0$ und $\phi(L) = 0$, so findet man das Ergebnis in Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. VII 38. p171ff.

⁰ Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I. Gewöhnliche Differentialgleichungen, B. §3 9.2 (a₂) p263f.

Satz 5.2.

Für die Lösung $\phi(x) = a\phi_1(x) + b\phi_2(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi\right) - q\phi + \lambda\rho\phi = 0, \quad x \in (0, L).$$

gilt asymptotisch

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &\sim \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}} \cos\left(\sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{p(\xi)}} d\xi\right); \\ \phi_2(x) &\sim \frac{1}{\sqrt[4]{p(x)\rho(x)}} \sin\left(\sqrt{\lambda} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{p(\xi)}} d\xi\right).\end{aligned}\tag{5.1-1}$$

Man findet dieses Ergebnis etwa in Olver⁰. Gleich wie in Kapitel 1.2 bestimmt man aus der Randbedingung bei 0 die Konstanten a und b und den Eigenwert aus der Randbedingung bei L . Weiters lassen sich Aussagen über die Verteilung der Eigenwerte⁰ und über Schranken für die auftretenden Eigenfunktionen⁰ machen.

Zuletzt sei noch der Monotoniesatz angegeben, der den Einfluß der einzelnen Parameter der Differentialgleichung auf die Eigenwerte beschreibt. Man benützt dieses Ergebnis um Schranken für die Eigenwerte zu gewinnen.

Satz 5.3. (Monotoniesatz)

Wir betrachten ein reguläres Sturm-Liouville Randwertproblem

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi\right) - q\phi + \lambda\rho\phi = 0, \quad x \in (0, L).$$

mit den Randbedingungen $\phi(0) = 0$ und $\phi(L) = 0$, dann gilt:

Verkleinert man das Intervall $(0, L)$, vergrößert p oder q oder verkleinert ρ , so wachsen alle Eigenwerte λ_n an.⁰

Ähnliche Resultate erhält man für allgemeine lineare Randbedingungen.⁰

5.2. Eigenwerte und Eigenfunktionen

Das allgemeine Problem ist aufwendig zu lösen. Man geht hier im wesentlichen wie in Keller⁰ beschrieben vor. Bestimme die eindeutige Lösung zu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\phi\right) - q\phi + \lambda\rho\phi &= 0; \\ \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) &= 0; \\ \tilde{\alpha}\phi(0) + \tilde{\beta}\phi'(0) &= 0; \\ \alpha\tilde{\beta} - \beta\tilde{\alpha} &\neq 0.\end{aligned}\tag{5.2-1}$$

⁰ Olver, F. W. J.: Asymptotics and Special Functions, chap. 6 2.4 Theorem 2.2 p196.

⁰ Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations, chap. VII p143ff.

⁰ Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction Expansions associated with Second-order Differential Equations, chap. VIII p165ff.

⁰ Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. VII 38. p174.

⁰ Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. VII 38. p175.

⁰ Keller, H. B.: Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems, chap. 1 1.2 p7ff. und chap. 5 5.1, 5.2 p122ff.

die man mit Hilfe eines numerischen Integrationsverfahrens⁰ berechnet. Dann hat man das Nullstellenproblem

$$F(\lambda) = \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) = 0. \quad (5.2-2)$$

zu lösen. Beachte, die Ableitung der Eigenfunktion ϕ nach x wird bei der numerischen Integration automatisch mitberechnet. Zur Lösung dieses Nullstellenproblem es sich das Sekantenverfahren, wie in Schwarz⁰ beschrieben, zu verwenden. Es ergeben sich hier zwei Vorteile gegenüber dem sonst üblichen Newtonverfahren. Zum einen mu man nicht die Ableitung von ϕ nach λ berechnen und zum anderen ergibt sich bei einem Doppelschritt der Sekantenmethode, der ja gleich aufwendig wie ein Einzelschritt des Newtonverfahrens ist, eine etwas größere Konvergenzordnung⁰.

Bei der Schwingungsgleichung ergeben sich wesentliche Vereinfachungen, da man eine Darstellung für die Eigenfunktionen und einfach transzendente Gleichungen in den Koeffizienten der Randbedingungen für die Eigenwerte zur Verfügung hat. Satz 1.4 gibt uns günstige Startintervalle zum Suchen der Eigenwerte, soda diese mit dem Newton- oder Sekantenverfahren effizient berechnet werden können.

Weiters sei noch bemerkt, da mit Hilfe des Satzes 5.2 eine asymptotische Darstellung für die Eigenwerte gewonnen werden kann.

5.3. Fourierkoeffizienten, Fourierreihen und Fehlerabschätzungen

Im allgemeinen wird man auf numerische Integrationsmethoden zurückgreifen müssen. Aufgrund des Oszillationssatzes und der asymptotischen Darstellung mu man jedoch solche Verfahren heranziehen, die den Oszillationscharakter der Eigenfunktionen berücksichtigen.

Bei der Schwingungsgleichung ergibt sich eine wesentliche Verbesserung wenn sich die Fourierkoeffizienten mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation (FFT)⁰ berechnen lassen. Dies ist bei Dirichlet-, Dirichlet-Neumann-, Neumann-Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen möglich.

Bei der Auswertung der Fehlerabschätzungen ist zu beachten, da bei den auftretenden Differenzen Stellenauslöschung auftreten wird. Daher wird man mit diesen Fehlerabschätzungen nur eine begrenzte Genauigkeit erreichen. Es stellt sich jedoch heraus, da aufgrund des Faktors $\lambda_n = \mu_n^2 > (n-1)^2\pi^2/L^2$ in der Fehlerabschätzung (4.1-2) diese schnell konvergieren, soda man meist nur die ersten paar Glieder benötigen wird.

⁰ z.B.: mit der eingebetteten Runge-Kutta Methode DOPRI 4(5) mit Schrittweitensteuerung.

⁰ Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik, Kap. 5.3.1, 5.3.2 p198ff.

⁰ 2.6... beim Doppelschritt der Sekantenmethode gegenüber 2 beim Einzelschritt des Newtonverfahrens.

⁰ Eine elementare Beschreibung der FFT findet man z.B. in Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik, Kap. 4.2 p152ff.

æ

6. Tabelle zur Schwingungsgleichung

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der ersten paar Kapitel für die Schwingungsgleichung zusammengestellt werden. Da alle Aussagen schon in allgemeinerer Form bewiesen worden sind, wollen wir hier nur die Ergebnisse in tabellarischer Form angeben.

1. allgemeine physikalische Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) &= 0; \\ \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) &= 0.\end{aligned}\tag{6.1-1}$$

Dabei sind α, β, γ und δ wie in Definition 1.2 zu wählen.

Lösung:

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= \alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x; \\ \mu_n \quad \text{löst} \quad (\alpha\gamma + \beta\delta\mu^2) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cos \mu L &= 0; \\ (n-1+\vartheta)\frac{\pi}{L} \leq \mu_n \leq n\frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \lambda_n &= \mu_n^2.\end{aligned}\tag{6.1-2}$$

Norm:

$$\|\phi_n\|^2 = \frac{L}{2} \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right).\tag{6.1-3}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x); \\ c_n(f) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{6.1-4}$$

Falls $\alpha = \gamma = 0$, d.h. falls 0 ein Eigenwert ist, so hat die Fourierreihe von f den zusätzlichen Term

$$c_0(f)\phi_0(x) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.\tag{6.1-5}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - S_N(x) \right| \leq & \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} H[f] \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (6.1-6)$$

wobei

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (6.1-7)$$

und

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (6.1-8)$$

zu setzen ist.

2. periodische Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi(0) &= \phi(L); \quad \phi'(0) = \phi'(L). \end{aligned} \quad (6.2-1)$$

Lösung, Norm:

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= 1, \quad \sin \frac{2n\pi x}{L}, \quad \cos \frac{2n\pi x}{L}; & \|\phi_0\|^2 &= L; \\ \lambda_n &= \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 0, 1, \dots & \|\phi_n\|^2 &= \frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (6.2-2)$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n(f) \sin \frac{2n\pi x}{L}; \\ a_0(f) &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx; \\ a_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.2-3)$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - a_0(f) - \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos \frac{2n\pi x}{L} + b_n(f) \sin \frac{2n\pi x}{L} \right| \leq \\ \left(\frac{L}{2\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N n^2 (a_n^2(f) + b_n^2(f)) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + 1)}. \end{aligned} \quad (6.2-4)$$

3. Dirichlet Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, & x \in (0, L); \\ \phi(0) &= 0; & \phi(L) = 0.\end{aligned}\tag{6.3-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \sin \frac{n\pi x}{L}; \\ c_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{6.3-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - S_N(x) \right| \leq \left(\frac{2L}{\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N n^2 c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N+1)}.\tag{6.3-3}$$

4. Dirichlet-Neumann Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi(0) &= 0; \quad \phi'(L) = 0.\end{aligned}\tag{6.4-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}; \\ c_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{6.4-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - S_N(x) \right| \leq \left(\frac{2L}{\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi' \left(N + \frac{1}{2} \right)}.\tag{6.4-3}$$

5. Neumann-Dirichlet Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) &= 0; \quad \phi(L) = 0.\end{aligned}\tag{6.5-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \cos \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}; \\ c_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{6.5-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - S_N(x) \right| \leq \left(\frac{2L}{\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi' \left(N + \frac{1}{2} \right)}.\tag{6.5-3}$$

6. Neumann Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) &= 0; \quad \phi'(L) = 0.\end{aligned}\tag{6.6-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \frac{c_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \cos \frac{n\pi x}{L}; \\ c_n(f) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{6.6-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\left| f(x) - S_N(x) \right| \leq \left(\frac{2L}{\pi^2} \int_0^L f'^2(x) dx - \sum_{n=1}^N n^2 c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N+1)}.\tag{6.6-3}$$

7. Dirichlet-Robin Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi(0) &= 0; \quad \phi'(L) + h\phi(L) = 0, \quad h > 0.\end{aligned}\tag{6.7-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \sin \mu_n x; \\ c_n(f) &= \frac{2(h^2 + \mu_n^2)}{(h^2 + \mu_n^2)L + h} \int_0^L f(x) \sin \mu_n x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &\text{ löst } \mu \cot \mu L = -h.\end{aligned}\tag{6.7-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - S_N(x)\right| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) \, dx + \frac{2}{L} f(L)^2 h \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(1 + \frac{h}{(h^2 + \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \frac{1}{2})}.\end{aligned}\tag{6.7-3}$$

8. Neumann-Robin Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) &= 0; \quad \phi'(L) + h\phi(L) = 0, \quad h > 0.\end{aligned}\tag{6.8-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \cos \mu_n x; \\ c_n(f) &= \frac{2(h^2 + \mu_n^2)}{(h^2 + \mu_n^2)L + h} \int_0^L f(x) \cos \mu_n x \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &\text{ löst } h \cot \mu L = \mu.\end{aligned}\tag{6.8-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}\left|f(x) - S_N(x)\right| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) \, dx + \frac{2}{L} f(L)^2 h \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(1 + \frac{h}{(h^2 + \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N)}.\end{aligned}\tag{6.8-3}$$

9. Robin-Dirichlet Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\phi'' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) - h\phi(0) &= 0, \quad h > 0; \quad \phi(L) = 0.\end{aligned}\tag{6.9-1}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x); \\ c_n(f) &= \frac{2}{(h^2 + \mu_n^2)L + h} \int_0^L f(x) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x) \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &\text{ löst } \mu \cot \mu L = -h.\end{aligned}\tag{6.9-2}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - S_N(x) \right| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} f(0)^2 h \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(h^2 + \mu_n^2 + \frac{h}{L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi' \left(N + \frac{1}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (6.9-3)$$

10. Robin-Neumann Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \phi'' + \lambda \phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) - h\phi(0) &= 0, \quad h > 0; \quad \phi'(L) = 0. \end{aligned} \quad (6.10-1)$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x); \\ c_n(f) &= \frac{2}{(h^2 + \mu_n^2)L + h} \int_0^L f(x) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &\text{ löst } \quad h \cot \mu L = \mu. \end{aligned} \quad (6.10-2)$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - S_N(x) \right| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} f(0)^2 h \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(h^2 + \mu_n^2 + \frac{h}{L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N)}. \end{aligned} \quad (6.10-3)$$

11. Robin Randbedingungen

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \phi'' + \lambda \phi &= 0, \quad x \in (0, L); \\ \phi'(0) - h\phi(0) &= 0, \quad h > 0; \\ \phi'(L) + k\phi(L) &= 0, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (6.11-1)$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x); \\ c_n(f) &= \frac{2(k^2 + \mu_n^2)}{(h^2 + \mu_n^2)(k^2 + \mu_n^2)L + (h+k)(hk + \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) (h \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &\text{ löst } \quad (h+k)\mu \cot \mu L = -hk + \mu^2. \end{aligned} \quad (6.11-2)$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - S_N(x) \right| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} f(L)^2 k + \frac{2}{L} f(0)^2 h \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(h^2 + \mu_n^2 + \frac{(h+k)(hk + \mu_n^2)}{(h^2 + \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N)}. \end{aligned} \quad (6.11-3)$$

æ

7. Allgemeines zu partiellen Differentialgleichungen

Wir wollen nun die in den ersten Kapiteln gewonnenen Ergebnisse auf partielle Differentialgleichungen anwenden und werden dabei wie folgt vorgehen:

Im ersten Schritt werden wir mit Hilfe der Separationsmethode bzw. der partiellen Fouriertransformation die Lösung des gestellten Problems gewinnen. Da die Lösung vielfach in der Literatur zu finden ist, werden wir diese Ableitung nur skizzieren und im wesentlichen auf Literaturangaben verweisen.

In einem zweiten Schritt wollen wir eine gleichmäßige Abschätzung des Fehlers beim Abbruch der Reihen gewinnen. Die Methode wurde schon in Satz 4.2 bzw. 4.6ff. benutzt, sie lautet:

1.) Anwenden der Cauchy-Bunyakovskii-Schwarzschen Ungleichung (CBS-Ungl.), soda ein Faktor durch eine der zwei folgenden Gleichungen abgeschätzt werden kann.

$$\sum_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \int_0^L f^2 \rho dx; \quad (3.2-4)$$

$$\sum_n \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \int_0^L p f'^2 + q f^2 dx + H[f]. \quad (3.2-6)$$

2.) Abschätzen von $\phi_n^2 / \|\phi_n\|_{2,\rho}^2$, λ_n usw. und Summation der entstehenden Reihe mit Hilfe der Psifunktion.

Den ersten Teil des Beweises 4.2, nämlich die gleichmäßige und punktweise Konvergenz der entsprechenden Reihe, werden wir jeweils überspringen, da sich die dafür benötigten Schritte beim Aufstellen der Fehlerabschätzung wiederholen.

Aus der Fehlerabschätzung kann man Bedingungen ablesen, soda die Lösung u stetig ist und die Randbedingungen erfüllt. Soll u auch noch die Differentialgleichung sowie die Anfangswerte erfüllen, so mu man analog wie für u die gliedweise differenzierten Reihen von u abschätzen. Es stellt sich heraus, da eine größere Regularität der Inhomogenität der Differentialgleichung sowie der Anfangswerte verlangt werden mu, als dies für die Konvergenz der Reihe für u notwendig wäre. Wir wollen dies aber nicht näher ausführen, da es weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen würde.⁰

⁰ vgl. Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations.

Bevor wir uns endgültig mit der ersten Differentialgleichung befassen, wollen wir noch ein paar Notationen festhalten. Wir bezeichnen durchgehend die Eigenfunktionen des entsprechenden Randwertproblems mit ϕ_n und mit λ_n die dazugehörigen Eigenwerte. Da in allen behandelten Problemen aufgrund der physikalischen bzw. der periodischen Randbedingungen alle Eigenwerte nichtnegativ sind, bezeichnen wir mit λ_0 den Eigenwert 0 (falls dieser auftritt) und mit λ_n , $n \in \mathbb{N}$ die echt positiven Eigenwerte. Um uns Fallunterscheidungen zu sparen, werden wir Terme, die nur beim Eigenwert 0 auftreten, in geschlungene Klammern setzen. Ist 0 kein Eigenwert, so sind diese Glieder wegzulassen. Wir werden im folgenden solche Klammern in keinem anderen Zusammenhang benützen, soda diese Schreibweise eindeutig ist.

æ

8. Die Wärmeleitungsgleichung

8.1. Die gewöhnliche Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen

Definition 8.1.

Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen ist definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad k > 0; \\ u(x, 0) &= f(x); \\ \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{phys. Rb.} \end{aligned} \quad (8.1-1)$$

Ausführliche Darstellungen dieser Differentialgleichung findet man in Carslaw, Jaeger⁰ oder in Crank⁰. Mit dem Separationsansatz $u = TX$ erhält man für die homogene Gleichung

$$\frac{T'}{T} = k \frac{X''}{X} = -\lambda k, \quad \lambda = \text{const.}$$

Es mu X die Gleichung

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0; \\ \text{phys. Rb.} \end{aligned}$$

erfüllen, also gerade die Schwingungsgleichung. Ihre Eigenwerte λ_n und Eigenfunktionen ϕ_n haben wir in Kapitel 1.2 genau studiert. Mit der partiellen Fouriertransformation

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L u(x, t) \phi_n(x) dx; \\ A_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) dx. \end{aligned}$$

⁰ Carslaw, H. S., Jaeger J. C.: Conduction of Heat in Solids.

⁰ Crank, J.: The Mathematics of Diffusion.

erhalten wir aus der partiellen Differentialgleichung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$a'_n + \lambda_n k a_n = A_n;$$

$$a_n(0) = c_n(f).$$

wobei $c_n(f)$ der gewöhnliche Fourierkoeffizient von f bezüglich ϕ_n ist. Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$a_n(t) = c_n(f) \exp(-\lambda_n k t) + \int_0^t \exp(-\lambda_n k(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau. \quad (8.1-2)$$

Setzt man in die Lösung $u = \sum a_n(t) \phi_n(x)$ die berechneten Größen aus Kapitel 1.2 ein, so erhält man

Satz 8.1.

Die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen ist gegeben durch^{0 0 0}

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \{a_0(t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x); \\ a_n(t) &= c_n(f) \exp(-\mu_n^2 k t) + \int_0^t \exp(-\mu_n^2 k(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n(f) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ A_n(t) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L F(x, t) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n &> 0 \text{ löst} \\ (\alpha\gamma + \beta\delta \mu^2) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma) \mu \cos \mu L &= 0; \\ \text{Falls } \alpha = \gamma = 0, \text{ so ist auch } 0 &\text{ ein Eigenwert.} \\ a_0(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(f(\xi) + \int_0^t F(\xi, \tau) d\tau \right) d\xi. \end{aligned} \quad (8.1-3)$$

Da sich für die Fälle $f \neq 0, F \equiv 0$ und $f \equiv 0, F \neq 0$ qualitativ verschieden groe Fehler ergeben, werden wir diese getrennt angeben. Wegen der Linearität des gestellten Problems ergibt sich der Gesamtfehler als Summe der beiden Einzelfehler, da ja auch die Lösung Summe der beiden Einzelslösungen ist. Zuerst der Fall $f \neq 0, F \equiv 0$

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \exp(-\mu_n^2 k t) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-2\mu_n^2 k t) \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \exp(-2\mu_{N+1}^2 k t_0) \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad \text{falls } t \geq t_0. \end{aligned}$$

⁰ vgl. Carslaw, H. S., Jaeger J. C.: Conduction of Heat in Solids, chap. III §3.9 p114ff. und §3.11 p126.

⁰ siehe auch: Vladimirov, V. S. et Coll.: Recueil de Problèmes d'Équations de Physique Mathématique, chap. VI §20 2. p236ff.

⁰ vgl.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p56ff.

Letzten Ausdruck haben wir bereits in Kapitel 4.3 eingehend diskutiert. Setzen wir das Ergebnis ein, so erhalten wir

$$|u - S_N|^2 \leq \exp(-2\mu_{N+1}^2 kt_0) \left(\int_0^L f'^2(x) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \right) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta).$$

und mit Kapitel 1.2 ergibt sich weiters

Satz 8.2.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, $F \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 8.1 für $x \in [0, L]$, $t \geq t_0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| \leq & \frac{L}{\pi} \exp(-\mu_{N+1}^2 kt_0) \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} H[f] \right. \\ & \left. - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (8.1-4)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (8.1-5)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (8.1-6)$$

gegeben.

Obiger Satz garantiert uns, da u eine stetige Funktion auf dem Gebiet $\overline{G}$ mit $G = (0, L) \times \mathbb{R}^+$ ist. Es gilt daher aufgrund der Stetigkeit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum c_n(f) \exp(-\mu_n^2 kt) \phi_n(x); \\ u(x, 0) &= \sum c_n(f) \phi_n(x) = f(x). \end{aligned}$$

d.h., da der Anfangswert angenommen wird. Damit nun u auch tatsächlich eine Lösung des Differentialgleichungsproblems ist, mu man zeigen, da u die nötigen Ableitungen nach x und t besitzt. Analog wie im Beweis des Satzes 1.7 erhält man

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2} \sin(\mu_n x + \vartheta); \\ \phi'(x) &= \alpha \mu_n \cos \mu_n x + \beta \mu_n^2 \sin \mu_n x = \mu_n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2} \cos(\mu_n x + \vartheta). \end{aligned} \quad (8.1-7)$$

und daraus

$$|c_n(f)| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2}} \sup_{x \in [0, L]} |f(x)|. \quad (8.1-8)$$

Damit erhält man die Konvergenz der erforderlichen Ableitungen in G , denn es gilt aufgrund der obigen Abschätzungen für $c_n(f)$, $\phi_n(x)$ und $\phi'_n(x)$ für die gliedweise differenzierten Reihen von u

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| &\leq 2k \sup_{x \in [0, L]} |f(x)| \sum \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 kt); \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| &\leq 2 \sup_{x \in [0, L]} |f(x)| \sum \mu_n \exp(-\mu_n^2 kt); \\ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| &\leq 2 \sup_{x \in [0, L]} |f(x)| \sum \mu_n^2 \exp(-\mu_n^2 kt). \end{aligned}$$

Durch gliedweises Differenzieren der Lösung u stellt man nun leicht fest, da u die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt, womit wir auch den Satz 8.1 für $F \equiv 0$ bewiesen haben.

Als nächsten Schritt werden wir nun die Fehlerabschätzung für $f \equiv 0$ berechnen. Dazu wollen wir zuerst den Koeffizienten $a_n(t)$ abschätzen

$$\begin{aligned} a_n^2(t) &= \left(\int_0^t \exp(-\mu_n^2 k(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau \right)^2 \\ &\leq \int_0^t \exp(-2\mu_n^2 k(t - \tau)) d\tau \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &= \frac{1}{2\mu_n^2 k} (1 - \exp(-2\mu_n^2 kt)) \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\mu_n^2 k} \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$a_n^2(t) \leq \frac{1}{2\mu_n^2 k} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau, \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (8.1-9)$$

Daraus erhalten wir mit Hilfe von Kapitel 4.3 die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n a_n^2(t) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2 \frac{1}{2\mu_n^2 k} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2 \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta). \end{aligned}$$

Der erste Faktor läßt sich durch die Parsevalgleichung für $x \mapsto F(x, t)$ umformen.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2 = \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) d\xi d\tau - \left\{ L \int_0^T A_0^2(\tau) d\tau \right\} - \sum_{n=1}^N \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2.$$

Setzt man nun noch die Ergebnisse aus Kapitel 1.2 ein, so erhält man folgenden Satz

Satz 8.3.

Ist $F \in L^2((0, L) \times (0, T))$, $f \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 8.1 für $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{L}{\pi \sqrt{2k}} \left(\frac{2}{L} \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) d\xi d\tau - \left\{ \frac{2}{L^2} \int_0^T \left(\int_0^L F(\xi, \tau) d\xi \right)^2 d\tau \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (8.1-10)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (8.1-11)$$

gegeben.

Zu beachten ist, da der Ausdruck in geschwungenen Klammern nur bei $\alpha = \gamma = 0$ auftritt!

8.2. Die gedämpfte Schwingungsgleichung

Im folgenden werden wir öfters nach Eigenfunktionen der gedämpften Schwingungsgleichung entwickeln.

Definition 8.2.

Das Randwertproblem der gedämpften Schwingungsgleichung auf dem Intervall $(0, L)$ ist definiert durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \phi'' - 2a\phi' + \lambda\phi &= 0, \quad x \in (0, L), \quad a \text{ bel.} \\ \text{bzw.} \quad \left(\exp(-2ax)\phi' \right)' + \lambda \exp(-2ax)\phi &= 0. \end{aligned} \quad (8.2-1)$$

zusammen mit den linearen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha\phi(0) + \beta\phi'(0) &= 0, \quad (\alpha, \beta) \neq 0; \\ \gamma\phi(L) + \delta\phi'(L) &= 0, \quad (\gamma, \delta) \neq 0. \end{aligned} \quad (8.2-2)$$

die die Normierung (1.2-3) erfüllen sollen. Wir betrachten nur physikalische Randbedingungen von denen wir zusätzlich verlangen

$$\begin{cases} a + \alpha \leq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\beta \neq 0; \\ a + \gamma \geq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\delta \neq 0. \end{cases} \quad (8.2-3)$$

Das ist ein reguläres Sturm-Liouville Randwertproblem mit $p = \rho = \exp(-2ax)$ und $q = 0$. Es treten daher nur nichtnegative Eigenwerte auf. Sehr nützlich wird sich folgendes zu obiger Definition äquivalentes Problem erweisen

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}'' + \tilde{\lambda}\tilde{\phi} &= 0, & \tilde{\phi} &= \exp(-ax)\phi, \quad \lambda = a^2 + \tilde{\lambda} \geq 0; \\ \tilde{\alpha}\tilde{\phi}(0) + \tilde{\beta}\tilde{\phi}'(0) &= 0, & \tilde{\alpha} &= \alpha + a\beta, \quad \tilde{\beta} = \beta; \\ \tilde{\gamma}\tilde{\phi}(L) + \tilde{\delta}\tilde{\phi}'(L) &= 0, & \tilde{\gamma} &= \gamma + a\delta, \quad \tilde{\delta} = \delta. \end{aligned} \quad (8.2-5)$$

Unter obigen Voraussetzungen für physikalische Randbedingungen gilt, da entweder $\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 0$ oder, da $\tilde{\alpha}, \dots, \tilde{\delta}$ wiederum physikalische Randbedingungen definieren. Aus den definierenden Gleichungen (1.2-6) für nichtpositive Eigenwerte erhält man leicht, da $\tilde{\lambda} \leq 0$ genau dann auftritt, falls $\alpha = \gamma = 0$ und somit $\tilde{\lambda} = -a^2$ ist. Daraus ergibt sich mit (8.2-3) als einzige Möglichkeit $\lambda_0 = 0$ und $\phi_0 = 1$. Die Eigenfunktionen zu positiven Eigenwerten $\tilde{\lambda}$ ergeben sich sofort nach den Sätzen 1.1 und 1.2. Substituiert man gemäß (8.2-5) zurück, so erhält man

Satz 8.4.

Das Randwertproblem der gedämpften Schwingungsgleichung hat die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \exp(ax)\tilde{\phi}_n(x) = \exp(ax)((\alpha + a\beta)\sin\mu_n x - \beta\mu_n \cos\mu_n x); \\ \lambda_n &= a^2 + \mu_n^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.2-6)$$

$$\mu_n > 0 \quad \text{löst} \quad (\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 + \mu^2))\sin\mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cos\mu L = 0.$$

Falls $\alpha = \gamma = 0$ und gemäß (1.2-3) $\beta = \delta = 1$ ist, so tritt auch der Eigenwert 0 mit der dazugehörigen Eigenfunktion $\phi_0 = 1$ auf.

Als nächstes wollen wir die Eigenwerte abschätzen. Für $\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 0$ gilt nach Kapitel 1.2 $\mu_n = n\pi/L$. Sind dagegen $\tilde{\alpha}, \dots, \tilde{\delta}$ physikalische Randbedingungen, so erhält man $(n-1+\vartheta)\pi/L \leq \mu_n \leq n\pi/L$, wobei ϑ durch (4.3-4) gegeben ist. Aufgrund von $\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = \alpha\delta - \beta\gamma$, $\tilde{\beta} = \beta$ und $\tilde{\gamma} = \gamma$ erhält man daraus unmittelbar

Satz 8.5.

Für die Eigenwerte der gedämpften Schwingungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen wie in Definition 8.2 gilt

$$\begin{aligned}\lambda_n &= a^2 + \mu_n^2; \\ (n-1+\vartheta)\frac{\pi}{L} &\leq \mu_n \leq n\frac{\pi}{L}.\end{aligned}\tag{8.2-7}$$

wobei

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases}\tag{8.2-8}$$

Die Norm berechnen wir wie folgt

$$\|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = \int_0^L \phi_n^2(x) \exp(-2ax) dx = \int_0^L \tilde{\phi}_n^2(x) dx = \|\tilde{\phi}_n\|^2.$$

Mit Satz 1.6 erhält man daraus leicht

Satz 8.6.

Die Norm der Eigenfunktion $\phi_0(x) = 1$ ist gegeben durch

$$\|\phi_0\|_{2,\rho}^2 = \begin{cases} L, & \text{falls } a = 0; \\ \frac{1}{2a}(1 - \exp(-2aL)), & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}\tag{8.2-9}$$

und von $\phi_n(x) = \exp(ax)((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta\mu_n \cos \mu_n x)$ durch

$$\|\phi_n\|_{2,\rho}^2 = ((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2\mu_n^2) \frac{L}{2} + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2\mu_n^2)}.\tag{8.2-10}$$

Beachte, für $a = 0$ ergibt sich $\|\phi_0\|^2$ auch als Grenzwert $a \rightarrow 0$. Wir werden daher oft nur den Fall $a \neq 0$ anschreiben und $a = 0$ als Grenzfall interpretieren. Da entweder $\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = 0$ oder $\tilde{\alpha}, \dots, \tilde{\delta}$ physikalische Randbedingungen definieren, gilt weiters nach Satz 1.7

Satz 8.7.

Es gilt die Abschätzung

$$\frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} = \exp(2ax) \frac{\tilde{\phi}_n^2(x)}{\|\tilde{\phi}_n\|^2} \leq \exp(2ax) \frac{2}{L}.\tag{8.2-11}$$

Satz 8.8.

Die Fourierreihe von f ist gegeben durch

$$\begin{aligned}f &= \{c_0(f)\} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \exp(ax)((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta\mu_n \cos \mu_n x); \\ c_n(f) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2\mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2\mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2\mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) \exp(-ax)((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta\mu_n \cos \mu_n x) dx \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

falls $\alpha = \gamma = 0$, so ist auch 0 ein Eigenwert

$$c_0(f) = \frac{2a}{1 - \exp(-2aL)} \int_0^L f(x) \exp(-2ax) dx.\tag{8.2-12}$$

Falls $a = 0$, so ist $c_0(f)$ durch seinen Grenzwert für $a \rightarrow 0$ gegeben, nämlich

$$\frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad \text{falls } a = 0.$$

Bei der Fehlerabschätzung gehen wir analog zu Satz 4.6 vor

$$\begin{aligned} |f - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \left(\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ergibt nach den Sätzen 8.5, 8.7 und 4.4

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2 \exp(2ax)/L}{a^2 + ((n-1+\vartheta)\pi/L)^2} \leq \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N+\vartheta). \quad (8.2-13)$$

Wir haben also

Satz 8.9.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, so erfüllt die Fourierreihe von f für $x \in [0, L]$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - S_N(x)| &\leq \frac{L}{\pi} \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N+\vartheta)} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + \frac{2}{L} H[f] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.2-14)$$

wobei $S_N(x)$ die N -te Partialsumme der Reihe für f ist. Weiters ist $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL) - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (8.2-15)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (8.2-16)$$

gegeben.

8.3. Die gedämpfte Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen

Definition 8.3.

Die inhomogene, gedämpfte Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen ist definiert durch

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ka \frac{\partial u}{\partial x} + bu &= F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad k > 0, a \text{ bel.}, b \geq 0; \\ u(x, 0) &= f(x); \\ \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{phys. Rb.} \\ \text{zusätzlich gelte} \quad &\begin{cases} a + \alpha \leq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\beta \neq 0; \\ a + \gamma \geq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\delta \neq 0. \end{cases} \end{aligned}} \quad (8.3-1)$$

Als Spezialfälle ergeben sich die Gleichungen⁰

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu &= F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad k > 0, b \geq 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ka \frac{\partial u}{\partial x} &= F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad k > 0, a \text{ bel.} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad k > 0. \end{aligned}} \quad (8.3-2)$$

Der Separationsansatz $u = TX$ liefert für die homogene Gleichung

$$\frac{T'}{T} + b = k \left(\frac{X''}{X} - 2a \frac{X'}{X} \right) = -\lambda k, \quad \lambda = \text{const.}$$

Es muß also X die gedämpfte Schwingungsgleichung

$$X'' - 2aX + \lambda X = 0;$$

phys. Rb.

erfüllen, die wir im letzten Kapitel diskutiert haben. Mit der partiellen Fouriertransformation

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \int_0^L u(x, t) \phi_n(x) \exp(-2ax) dx; \\ A_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) \exp(-2ax) dx. \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} a'_n + (\lambda_n k + b)a_n &= A_n; \\ a_n(0) &= c_n(f). \end{aligned}$$

wobei $c_n(f)$ der gewöhnliche Fourierkoeffizient von f bezüglich ϕ_n ist. Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$a_n(t) = c_n(f) \exp(-(\lambda_n k + b)t) + \int_0^t \exp(-(\lambda_n k + b)(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau. \quad (8.3-3)$$

Setzt man in die Lösung $u = \sum a_n(t) \phi_n(x)$ die im letzten Kapitel berechneten Größen ein, so erhält man

⁰ siehe auch Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, allg. Fall: p64ff., $a = 0$: p59ff., $b = 0$: p62ff. und $a = b = 0$: p56ff.

Satz 8.10.

Die Lösung der inhomogenen, gedämpften Wärmeleitungsgleichung mit physikalischen Randbedingungen ist gegeben durch⁰

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \{a_0(t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \exp(ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x); \\
 a_n(t) &= c_n(f) \exp(-(\mu_n^2 k + a^2 k + b)t) + \int_0^t \exp(-(\mu_n^2 k + a^2 k + b)(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \\
 c_n(f) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\
 &\quad \cdot \int_0^L f(x) \exp(-ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
 A_n(t) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\
 &\quad \cdot \int_0^L F(x, t) \exp(-ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
 \mu_n > 0 \text{ löst} \\
 (\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 + \mu^2)) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma)\mu \cos \mu L &= 0; \\
 \text{Falls } \alpha = \gamma = 0, \text{ so ist auch } \lambda_0 = 0 \text{ ein Eigenwert.} \\
 a_0(t) &= \frac{2a}{1 - \exp(-2aL)} \int_0^L \left(\exp(-bt) f(\xi) + \int_0^t \exp(-b(t - \tau)) F(\xi, \tau) d\tau \right) \exp(-2a\xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{8.3-4}$$

Für $a = 0$ ist der Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu nehmen.

Wie bei der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung werden wir die Fälle $f \neq 0, F \equiv 0$ und $f \equiv 0, F \neq 0$ unterscheiden. Wegen der Linearität des gestellten Problems ergibt sich der Gesamtfehler als Summe der beiden Einzelfehler. Zuerst der Fall $f \neq 0, F \equiv 0$

$$\begin{aligned}
 |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \exp(-(\mu_n^2 k + a^2 k + b)t) \phi_n(x) \right|^2 \\
 &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \exp(-2(\mu_n^2 k + a^2 k + b)t) \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\
 &\leq \exp(-2(\mu_{N+1}^2 k + a^2 k + b)t_0) \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad \text{falls } t \geq t_0.
 \end{aligned}$$

Letzten Ausdruck haben wir in Kapitel 8.2 diskutiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 |u - S_N|^2 &\leq \exp(-2(\mu_{N+1}^2 k + a^2 k + b)t_0) \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta) \\
 &\quad \cdot \left(\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 8.2 folgt

⁰ vgl.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p64ff.

Satz 8.11.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, $F \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 8.10 für $x \in [0, L]$, $t \geq t_0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + \frac{2}{L} H[f] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \\ &\quad \exp(-(\mu_{N+1}^2 k + a^2 k + b)t_0) \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (8.3-5)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL) - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (8.3-6)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (8.3-7)$$

gegeben.

Wir wollen uns nun der Fehlerabschätzung für $f \equiv 0$ zuwenden. Dazu müssen wir zuerst den Koeffizienten $a_n(t)$ abschätzen

$$\begin{aligned} a_n^2(t) &= \left(\int_0^t \exp(-(\mu_n^2 k + a^2 k + b)(t - \tau)) A_n(\tau) d\tau \right)^2 \\ &\leq \int_0^t \exp(-2(\mu_n^2 k + a^2 k + b)(t - \tau)) d\tau \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &= \frac{1}{2(\mu_n^2 k + a^2 k + b)} (1 - \exp(-2(\mu_n^2 k + a^2 k + b)t)) \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{1}{2(\mu_n^2 k + a^2 k + b)} \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $b \geq 0$

$$a_n^2(t) \leq \frac{1}{2(\mu_n^2 + a^2)k} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau, \quad \text{für } t \in [0, T]. \quad (8.3-8)$$

und mit Gleichung (8.2-13) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n a_n^2(t) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (a^2 + \mu_n^2) \frac{1}{2(\mu_n^2 + a^2)k} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta). \end{aligned}$$

Der erste Faktor lässt sich durch die Parsevalgleichung für $x \mapsto F(x, t)$ umformen.

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 &= \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi d\tau - \left\{ \int_0^T A_0^2(\tau) d\tau \|\phi_0\|_{2,\rho}^2 \right\} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2. \end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Kapitel 8.2 ein, so erhält man

Satz 8.12.

Ist $F \in L_p^2((0, L) \times (0, T))$, $f \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 8.10 für $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{L}{\pi\sqrt{2k}} \left(\frac{2}{L} \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi d\tau \right. \\ &\quad - \left\{ \frac{4a}{(1 - \exp(-2aL))L} \int_0^T \left(\int_0^L F(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi \right)^2 d\tau \right\} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \Big)^{1/2} \\ &\quad \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \tag{8.3-9}$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Für $a = 0$ ist der Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu nehmen. Weiters ist ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \tag{8.3-10}$$

gegeben.

Der Ausdruck in geschwungenen Klammern tritt nur bei $\alpha = \gamma = 0$ auf!

æ

9. Die Wellengleichung

9.1. Die gewöhnliche Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen

Definition 9.1.

Die inhomogene Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad c \neq 0; \\
 & u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \\
 & \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{phys. Rb.}
 \end{aligned} \tag{9.1-1}$$

Der Separationsansatz $u = TX$ liefert für die homogene Gleichung

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\lambda c^2, \quad \lambda = \text{const.}$$

weshalb X die Schwingungsgleichung

$$X'' + \lambda X = 0;$$

phys. Rb.

erfüllt. Wir wenden die partielle Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
 a_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L u(x, t) \phi_n(x) dx; \\
 A_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) dx.
 \end{aligned}$$

auf die Differentialgleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}
 a_n'' + \lambda_n c^2 a_n &= A_n; \\
 a_n(0) &= c_n(f), \quad a_n'(0) = c_n(g).
 \end{aligned}$$

wobei $c_n(f)$, $c_n(g)$ die gewöhnlichen Fourierkoeffizienten von f bzw. g bezüglich ϕ_n sind. Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$a_n(t) = c_n(f) \cos \sqrt{\lambda_n} ct + \frac{c_n(g)}{\sqrt{\lambda_n} c} \sin \sqrt{\lambda_n} ct + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} c} \int_0^t \sin \sqrt{\lambda_n} c(t - \tau) A_n(\tau) d\tau. \quad (9.1-2)$$

und daraus die Lösung $u = \sum a_n(t) \phi_n(x)$. Setzt man die berechneten Größen aus Kapitel 1.2 ein, so erhält man

Satz 9.1.

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen ist gegeben durch^{0 0}

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \{a_0(t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x); \\ a_n(t) &= c_n(f) \cos \mu_n ct + \frac{c_n(g)}{\mu_n c} \sin \mu_n ct + \frac{1}{\mu_n c} \int_0^t \sin \mu_n c(t - \tau) A_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n(f) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ c_n(g) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L g(x) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ A_n(t) &= \frac{2(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2)(\gamma^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta \mu_n^2)} \\ &\quad \cdot \int_0^L F(x, t) (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ \mu_n > 0 \text{ löst} \\ (\alpha\gamma + \beta\delta \mu^2) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma) \mu \cos \mu L &= 0; \\ \text{Falls } \alpha = \gamma = 0, \text{ so ist auch } 0 \text{ ein Eigenwert.} \\ a_0(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L \left(f(\xi) + tg(\xi) + \int_0^t (t - \tau) F(\xi, \tau) d\tau \right) d\xi. \end{aligned} \quad (9.1-3)$$

Bei der Fehlerabschätzung unterscheiden wir die Fälle $f \neq 0$, $g \neq 0$ und $F \neq 0$. Wegen der Linearität erhalten wir den Gesamtfehler als Summe der Einzelfehler. Als erstes betrachten wir den Fall $f \neq 0$.

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \cos \mu_n ct \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \cos^2 \mu_n ct \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \left(\int_0^L f'^2(x) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \right) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta), \quad \text{nach Kap. 4.3} \end{aligned}$$

Mit Kapitel 1.2 ergibt sich

⁰ vgl.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p85ff.

⁰ Vladimirov, V. S. et Coll.: Recueil de Problèmes d'Équations de Physique Mathématique, chap. VI §20 1. p226f.

Satz 9.2.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, $g, F \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.1 für $x \in [0, L]$, $t \geq 0$ die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|u(x, t) - S_N(x, t)| \leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}} \quad (9.1-4)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (9.1-5)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (9.1-6)$$

gegeben.

Für $g \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(g) \frac{1}{\mu_n c} \sin \mu_n c t \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(g) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 c^2} \sin^2 \mu_n c t \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2} \quad (\text{CBS-Ungl.}) \end{aligned}$$

Für den ersten Faktor benützen wir die Parsevalgleichung für g und, wegen $\lambda_n = \mu_n^2$, für den Zweiten die Gleichung (4.3-2). Es ergibt sich

$$|u - S_N|^2 \leq \frac{1}{c^2} \left(\int_0^L g^2(x) dx - \{c_0^2(g) \|\phi_0\|^2\} - \sum_{n=1}^N c_n^2(g) \|\phi_n\|^2 \right) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta).$$

und weiters mit Kapitel 1.2

Satz 9.3.

Ist $g \in L^2(0, L)$, $f, F \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.1 für $x \in [0, L]$, $t \geq 0$ die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|u(x, t) - S_N(x, t)| \leq \frac{L}{c\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L g^2(x) dx - \left\{ \frac{2}{L^2} \left(\int_0^L g(x) dx \right)^2 \right\} - \sum_{n=1}^N \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) c_n^2(g) \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}} \quad (9.1-7)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (9.1-8)$$

gegeben ist.

Nun fehlt nur noch die Fehlerabschätzung für $F \neq 0$. Dazu müssen wir zuerst den Koeffizienten $a_n(t)$ abschätzen

$$\begin{aligned} a_n^2(t) &= \frac{1}{\mu_n^2 c^2} \left(\int_0^t \sin \mu_n c(t - \tau) A_n(\tau) d\tau \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\mu_n^2 c^2} \int_0^t \sin^2 \mu_n c(t - \tau) d\tau \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &= \frac{1}{2\mu_n^3 c^3} (\mu_n c t - \sin \mu_n c t \cos \mu_n c t) \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Hilfsatz 9.1.

Für $x > 0$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &\leq x - \sin x \cos x \leq Cx; \\ C &= 1.217233 \dots \end{aligned} \quad (9.1-9)$$

$$C = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}, \quad \text{wobei } y \in [\pi, 3\pi/2] \text{ die Gl. } y = \tan y \text{ eindeutig löst.} \quad (9.1-10)$$

Für dieses y gilt sogar die Gleichheit.

Um die Behauptung zu zeigen betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x - \sin x \cos x}{x} = 1 - \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Wegen $|\sin x| \leq |x|$ folgt

$$\left| \frac{\sin 2x}{2x} \right| \leq 1.$$

Es ist daher $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$, d.h.: $\forall x > 0$ gilt $x - \sin x \cos x \geq 0$.

Für $x \in [0, \pi/2]$ ist $\sin 2x \geq 0$ und somit $f(x) \leq 1$, bei $x = 2.2$ ist $f(x) = 1.216 \dots$ und für $x \geq 3\pi/4$ gilt

$$f(x) = 1 - \frac{\sin 2x}{2x} \leq 1 + \frac{1}{2x} \leq 1 + \frac{2}{3\pi} \leq 1.213.$$

Zusammen ergibt das, da f sein absolutes Maximum im Inneren des Intervalles $[\pi/2, 3\pi/4]$ annimmt, weshalb wir das Maximum durch Differenzieren und Nullsetzen bestimmen können. Es ergibt sich

$$2x = \tan 2x, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right).$$

Da die Tangensfunktion im gegebenen Intervall streng monoton von 0 auf ∞ steigt, hat diese Gleichung genau eine Lösung, nämlich $\bar{x} = 2.246 \dots$. Setzt man $y = 2\bar{x}$, so erhält man mit Hilfe der Beziehung

$$\cos(\arctan \varphi) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}, \quad \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

und der y definierenden Gleichung: $y = \tan y$ die Behauptung

$$C = f(\bar{x}) = 1 - \frac{\sin y}{y} = 1 - \cos y = 1 - \cos(\arctan y) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}. \quad \square$$

Mit dieser Abschätzung ergibt sich für $a_n(t)$

$$a_n^2(t) \leq \frac{CT}{\mu_n^2 c^2} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau, \quad \text{für } t \in [0, T]; \quad (9.1-11)$$

$$C = 0.608616 \dots$$

Damit läßt sich nun eine Fehlerabschätzung für u bestimmen.

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n a_n^2(t) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{CT}{c^2} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2 \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta). \end{aligned}$$

Den ersten Faktor formen wir mit der Parsevalgleichung für $x \mapsto F(x, t)$ um.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2 = \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) d\xi d\tau - \left\{ L \int_0^T A_0^2(\tau) d\tau \right\} - \sum_{n=1}^N \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|^2.$$

Nach Kapitel 1.2 erhalten wir

Satz 9.4.

Ist $F \in L^2((0, L) \times (0, T))$, $f, g \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.1 für $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$ und $C = 0.780138 \dots$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{CL\sqrt{T}}{c\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) d\xi d\tau - \left\{ \frac{2}{L^2} \int_0^T \left(\int_0^L F(\xi, \tau) d\xi \right)^2 d\tau \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \left(\alpha^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta\mu_n^2)}{(\gamma^2 + \delta^2\mu_n^2)L} \right) \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}. \end{aligned} \quad (9.1-12)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (9.1-13)$$

gegeben.

9.2. Die d'Alembertsche Lösung der Wellengleichung

Man rechnet leicht nach, da die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (9.2-1)$$

das Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= F, & x \in (0, L), t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \quad (9.2-2)$$

erfüllt. Mit der Transformation

$$\xi = x + ct; \quad \eta = x - ct. \quad (9.2-3)$$

läßt sich u leicht, und zwar in eindeutiger Weise, bestimmen.^{0 0} Um eine Lösung der Wellengleichung (9.1-1) zu erhalten müssen noch die Randbedingungen erfüllt werden. Dies erreicht man indem man die Funktionen f, g, F in geeigneter Weise fortsetzt.⁰

Definition 9.2.

Wir definieren für eine Funktion f , die auf dem Intervall $[0, L]$ gegeben sein soll, $\hat{f}$ durch

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in [0, L]; \\ S_\infty(x), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.2-4)$$

wobei S_∞ die Fourierreihe von f ist.

Satz 9.5.

Die Lösung der Schwingungsgleichung (9.1-1) ist gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\hat{f}(x + ct) + \hat{f}(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \hat{F}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (9.2-5)$$

In obigem Satz ist natürlich F als Funktion von x fortzusetzen. Aus der Definition von $\hat{f}$ kann man unmittelbar ablesen wie f , bei gegebenen Randbedingungen, fortzusetzen ist. Bei $\phi(0) = 0$ muß f bei 0 ungerade und bei $\phi'(0) = 0$ muß f bei 0 gerade fortgesetzt werden, da dies auch für die Fourierreihe von u gilt. Analog erhält man die Fortsetzungseigenschaften bei L .⁰

⁰ Vladimirov, V. S. et Coll.: Recueil de Problèmes d'Équations de Physique Mathématique, chap. IV §12. 2. p127.

⁰ vgl.: Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. I 5. p24ff.

⁰ Sobolev, S. L.: Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Lect. 4 §3. p51ff.

⁰ siehe auch: Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. I 2. p8ff. und 4. p21ff.

9.3. Die gedämpfte Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen

Definition 9.3.

Die inhomogene, gedämpfte Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen ist definiert durch

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ac^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bu = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, b, d \geq 0, a \text{ bel.} \\
 & u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \\
 & \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{phys. Rb.} \\
 & \text{zusätzlich gelte} \quad \begin{cases} a + \alpha \leq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\beta \neq 0; \\ a + \gamma \geq 0, & \text{falls } (\alpha\delta - \beta\gamma)\delta \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.3-1}$$

Als Spezialfälle ergeben sich hier die Gleichungen⁰

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, b, d \geq 0; \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ac^2 \frac{\partial u}{\partial x} = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, d \geq 0, a \text{ bel.} \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ac^2 \frac{\partial u}{\partial x} + bu = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, b \geq 0, a \text{ bel.} \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, d \geq 0; \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, b \geq 0; \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ac^2 \frac{\partial u}{\partial x} = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0, a \text{ bel.} \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \quad x \in (0, L), t > 0, \quad c \neq 0.
 \end{aligned} \tag{9.3-2}$$

Mit dem Separationsansatz $u = TX$ erhalten wir für die homogene Gleichung

$$\frac{T''}{T} + 2d \frac{T'}{T} + b = c^2 \left(\frac{X''}{X} - 2a \frac{X'}{X} \right) = -\lambda c^2, \quad \lambda = \text{const.}$$

Es mu X die gedämpfte Schwingungsgleichung

$$X'' - 2aX + \lambda X = 0;$$

phys. Rb.

erfüllen, die wir in Kapitel 8.2 diskutiert haben. Mit der partiellen Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
 a_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \int_0^L u(x, t) \phi_n(x) \exp(-2ax) dx; \\
 A_n(t) &= \frac{1}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \int_0^L F(x, t) \phi_n(x) \exp(-2ax) dx.
 \end{aligned}$$

⁰ siehe auch Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, allg. Fall: p103ff., $a = 0$: p96, $b = 0$: p93ff. und p101ff., $d = 0$: p99f., $a = b = 0$: p88f. und p92f., $a = d = 0$: p89ff., $b = d = 0$: p91f. und p97f., $a = b = d = 0$: p85ff.

erhalten wir

$$\begin{aligned} a_n'' + 2da_n' + (\lambda_n c^2 + b)a_n &= A_n; \\ a_n(0) &= c_n(f), \quad a_n'(0) = c_n(g). \end{aligned}$$

wobei $c_n(f)$, $c_n(g)$ die Fourierkoeffizienten von f bzw. g bezüglich ϕ_n sind. Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir

$$a_n(t) = c_n(f)R_n(t) + (dc_n(f) + c_n(g))S_n(t) + \int_0^t S_n(t-\tau)A_n(\tau) d\tau. \quad (9.3-3)$$

wobei

$$R_n(t) = \exp(-dt) \begin{cases} \cosh \sqrt{d^2 - b - \lambda_n c^2} t, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b < d^2; \\ 1, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b = d^2; \\ \cos \sqrt{\lambda_n c^2 + b - d^2} t, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b > d^2. \end{cases} \quad (9.3-4)$$

$$S_n(t) = \exp(-dt) \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{d^2 - b - \lambda_n c^2} t}{\sqrt{d^2 - b - \lambda_n c^2}}, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b < d^2; \\ t, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b = d^2; \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda_n c^2 + b - d^2} t}{\sqrt{\lambda_n c^2 + b - d^2}}, & \text{falls } \lambda_n c^2 + b > d^2. \end{cases} \quad (9.3-5)$$

gesetzt wurde. Setzt man in die Lösung $u = \sum a_n(t)\phi_n(x)$ die in Kapitel 8.2 berechneten Größen ein, so erhält man

Satz 9.6.

Die Lösung der inhomogenen, gedämpften Wellengleichung mit physikalischen Randbedingungen ist gegeben durch⁰

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \{a_0(t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \exp(ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x); \\ a_n(t) &= c_n(f)R_n(t) + (dc_n(f) + c_n(g))S_n(t) + \int_0^t S_n(t-\tau)A_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \\ R_n(t) &= \exp(-dt) \begin{cases} \cosh \sqrt{d^2 - b - a^2 c^2 - \mu_n^2 c^2} t, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b < d^2; \\ 1, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b = d^2; \\ \cos \sqrt{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2} t, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b > d^2. \end{cases} \\ S_n(t) &= \exp(-dt) \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{d^2 - b - a^2 c^2 - \mu_n^2 c^2} t}{\sqrt{d^2 - b - a^2 c^2 - \mu_n^2 c^2}}, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b < d^2; \\ t, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b = d^2; \\ \frac{\sin \sqrt{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2} t}{\sqrt{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2}}, & \text{falls } \mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b > d^2. \end{cases} \\ c_n(f) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\ &\quad \cdot \int_0^L f(x) \exp(-ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

⁰ vgl.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p103ff.

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\
&\quad \cdot \int_0^L g(x) \exp(-ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
A_n(t) &= \frac{2((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)}{((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2)((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))} \\
&\quad \cdot \int_0^L F(x, t) \exp(-ax) ((\alpha + a\beta) \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
\mu_n &> 0 \text{ löst} \\
&\quad (\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 + \mu^2)) \sin \mu L + (\alpha\delta - \beta\gamma) \mu \cos \mu L = 0; \\
\text{Falls } \alpha = \gamma = 0, &\text{ so ist auch } \lambda_0 = 0 \text{ ein Eigenwert.} \\
a_0(t) &= \frac{2a}{1 - \exp(-2aL)} \int_0^L \left((R_0(t) + dS_0(t)) f(\xi) \right. \\
&\quad \left. + S_0(t) g(\xi) + \int_0^t S_0(t - \tau) F(\xi, \tau) d\tau \right) \exp(-2a\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

(9.3–6)

Für $a = 0$ ist der Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu nehmen.

Um die Fehlerabschätzung für $f \neq 0$ angeben zu können müssen wir zuerst folgende zwei Hilfssätze beweisen

Hilfsatz 9.2.

Für die Funktion $g(x) = \exp(-\pi x)(1 + x)$, $x \geq 0$ gilt $g(x) \in [0, 1]$.

Es ist $g(0) = 1$, $g'(x) = \exp(-\pi x)(1 - \pi - \pi x) \leq 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Hilfsatz 9.3.

Ist $N \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, soda $\mu_N^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ ist, so gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ und } \forall t \geq 0: \quad |R_n(t) + dS_n(t)| \leq 1. \quad (9.3-7)$$

Es gilt mit $w = \sqrt{\mu_N^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2}$

$$f(t) := R_n(t) + dS_n(t) = \exp(-dt) \left(\cos wt + \frac{d}{w} \sin wt \right).$$

und damit

$$f'(t) = -\frac{w^2 + d^2}{w} \exp(-dt) \sin wt.$$

Es folgt für $t \in [0, \pi/w]$ $f(0) = 1$, $f'(t) \leq 0$ und $f(\pi/w) = -\exp(-d\pi/w) \geq -1$, also zusammen $|f(t)| \leq 1$ für $t \in [0, \pi/w]$.

Ist nun $t > \pi/w$, so haben wir aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|f(t)| \leq \exp\left(-\frac{d\pi}{w}\right) \left(1 + \frac{d}{w}\right).$$

und mit Hilfsatz 9.2 folgt die Behauptung. $\square$

Für den Fehler erhalten wir

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) (R_n(t) + dS_n(t)) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (R_n(t) + dS_n(t))^2 \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad \text{nach Hilfsatz 9.3.} \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus 8.2 erhalten wir

$$|u - S_N|^2 \leq \left(\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) c_n^2(f) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \right) \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta)$$

Satz 9.7.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, $g, F \equiv 0$, N_0 so groß, da $\mu_{N_0}^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ gilt, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.6 für $x \in [0, L]$ und $\forall N \geq N_0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{L}{\pi} \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N + \vartheta)} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) \exp(-2ax) dx + \frac{2}{L} H[f] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N (a^2 + \mu_n^2) \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (9.3-8)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL), & \text{falls } \beta = 0, \quad \delta = 1; \\ -\alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 0; \\ \gamma f(L)^2 \exp(-2aL) - \alpha f(0)^2, & \text{falls } \beta = 1, \quad \delta = 1. \end{cases} \quad (9.3-9)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (9.3-10)$$

gegeben.

Auch für die Fehlerabschätzung bei $g \neq 0$ benötigen wir eine Hilfsüberlegung, nämlich

Hilfsatz 9.4.

Ist $N \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, soda $\mu_N^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ ist, so gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ und } \forall t \geq 0: \quad |S_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b}}. \quad (9.3-11)$$

Wir setzen analog zu Hilfsatz 9.3 $w = \sqrt{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2}$ und

$$f(t) := S_n(t) = \exp(-dt) \frac{\sin wt}{w}.$$

Wegen $f(0) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ wird f genau dann extremal, wenn $f'(t_{ext}) = 0$. Es ist

$$f'(t) = \exp(-dt) \left(\cos wt - \frac{d}{w} \sin wt \right).$$

Nach Hilfsatz 1.1 ist $f'(t_{ext}) = 0$ genau dann wenn

$$\sin wt_{ext} = (-1)^{n+1} \frac{w}{\sqrt{w^2 + d^2}}, \quad \text{und} \quad \cos wt_{ext} = (-1)^n \frac{-d}{\sqrt{w^2 + d^2}}.$$

gilt. Wir erhalten so für $f(t_{ext})$

$$f(t_{ext}) = \exp(-dt_{ext}) \frac{(-1)^{n+1} w / \sqrt{w^2 + d^2}}{w}.$$

und somit

$$|f(t_{ext})| = \exp(-dt_{ext}) \frac{1}{\sqrt{w^2 + d^2}}. \quad \square$$

Damit werden wir nun die Fehlerabschätzung berechnen.

$$\begin{aligned} |u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(g) S_n(t) \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2(g) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n^2(t) \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \end{aligned}$$

Der erste Faktor ergibt mit Hilfe der Parsevalgleichung für g

$$\int_0^L g^2(x) \exp(-2ax) dx - \{c_0^2(g) \|\phi_0\|_{2,\rho}^2\} - \sum_{n=1}^N c_n^2(g) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2.$$

und für den zweiten Faktor ergibt sich nach Hilfsatz 9.4

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n^2(t) \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b} \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{c^2} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad b \geq 0 \text{ und } \lambda_n = a^2 + \mu_n^2 \\ &\leq \frac{1}{c^2} \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta), \quad \text{nach (8.2–13).} \end{aligned}$$

Satz 9.8.

Ist $g \in L_\rho^2(0, L)$, $f, F \equiv 0$, N_0 so groß, soda $\mu_{N_0}^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ gilt, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.6 für $x \in [0, L]$ und $\forall N \geq N_0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{L}{\pi c} \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N + \vartheta)} \left(\frac{2}{L} \int_0^L g^2(x) \exp(-2ax) dx \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{4a}{(1 - \exp(-2aL))L} \left(\int_0^L g(x) \exp(-2ax) dx \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^N \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) c_n^2(g) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (9.3-12)$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \quad (9.3-13)$$

gegeben.

Es bleibt noch die Fehlerabschätzung für $F \neq 0$ zu behandeln. Für den Koeffizienten $a_n(t)$ ergibt sich falls n so groß ist, da $w^2 := \mu_n^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ ist

$$\begin{aligned} a_n^2(t) &= \left(\int_0^t S_n(t-\tau) A_n(\tau) d\tau \right)^2 \\ &\leq \int_0^t S_n^2(t-\tau) d\tau \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\ &= \frac{1}{w^2} \int_0^t \exp(-2d(t-\tau)) \sin^2 w(t-\tau) d\tau \int_0^t A_n^2(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{w^2} \int_0^t \exp(-2d\tau) \sin^2 w\tau d\tau \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Hilfsatz 9.5.

Für $a > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \exp(-2ax) \sin^2 bx dx = \frac{b^2}{4a(a^2 + b^2)}. \quad (9.3-14)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-2ax) \sin^2 bx dx &= \int_0^\infty \exp(-2ax) \frac{1}{2} (1 - \cos 2bx) dx \\ &= \frac{1}{4a} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp(-2(a-ib)x) dx \\ &= \frac{1}{4a} - \operatorname{Re} \frac{1}{4(a-ib)} = \frac{b^2}{4a(a^2 + b^2)}. \quad \square \end{aligned}$$

Bei $d > 0$ können wir obigen Hilfsatz anwenden und erhalten

$$\frac{1}{w^2} \int_0^t \exp(-2d\tau) \sin^2 w\tau d\tau \leq \frac{1}{w^2} \int_0^\infty \exp(-2d\tau) \sin^2 w\tau d\tau = \frac{1}{4d(\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b)}$$

Ist hingegen $d = 0$, so ergibt sich mit Hilfsatz 9.1 und $C = 1.217233\dots$

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} \int_0^t \sin^2 w\tau d\tau &= \frac{1}{w^2} \cdot \frac{wt - \sin wt \cos wt}{2w} \\ &\leq \frac{Ct}{2w^2} \\ &\leq \frac{CT}{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b}, \quad t \in [0, T] \text{ und } C = 0.608616\dots \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das für $a_n(t)$

$$a_n^2(t) \leq \frac{C_{d,T}}{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau, \quad \text{mit} \quad C_{d,T} = \begin{cases} \frac{1}{4d}, & \text{falls } d > 0; \\ CT, & C = 0.608616\dots, \text{ falls } d = 0. \end{cases}$$

Für die Fehlerabschätzung ergibt sich wie gewohnt

$$\begin{aligned}
|u - S_N|^2 &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) \right|^2 \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b) a_n^2(t) \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 c^2 + a^2 c^2 + b} \cdot \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.}) \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C_{d,T} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|_{2,\rho}^2}, \quad b \geq 0, \quad \lambda_n = a^2 + \mu_n^2 \\
&\leq \frac{C_{d,T}}{c^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 \max(1, \exp(2aL)) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N + \vartheta).
\end{aligned}$$

Mit der Parsevalgleichung für $x \mapsto F(x, t)$ können wir den ersten Faktor umformen.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2 &= \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi d\tau - \left\{ \int_0^T A_0^2(\tau) d\tau \|\phi_0\|_{2,\rho}^2 \right\} \\
&\quad - \sum_{n=1}^N \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \|\phi_n\|_{2,\rho}^2.
\end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Kapitel 8.2 ein, so erhält man folgenden Satz

Satz 9.9.

Ist $F \in L^2_\rho((0, L) \times (0, T))$, $f, g \equiv 0$, N_0 so groß, soda $\mu_{N_0}^2 c^2 + a^2 c^2 + b - d^2 > 0$ gilt, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 9.6 für $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$ und $\forall N \geq N_0$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - S_N(x, t)| &\leq \frac{C_{d,T} L}{\pi c} \left(\frac{2}{L} \int_0^T \int_0^L F^2(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi d\tau \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{4a}{(1 - \exp(-2aL))L} \int_0^T \left(\int_0^L F(\xi, \tau) \exp(-2a\xi) d\xi \right)^2 d\tau \right\} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^N \left((\alpha + a\beta)^2 + \beta^2 \mu_n^2 + \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma + a(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta(a^2 - \mu_n^2))}{((\gamma + a\delta)^2 + \delta^2 \mu_n^2)L} \right) \int_0^T A_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad \max(1, \exp(aL)) \sqrt{\psi'(N + \vartheta)}.
\end{aligned} \tag{9.3-15}$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Die Konstante $C_{d,T}$ ist durch

$$C_{d,T} = \begin{cases} C\sqrt{T}, & C = 0.780138\dots, \quad \text{falls } d = 0; \\ \frac{1}{2\sqrt{d}}, & \text{falls } d > 0. \end{cases} \tag{9.3-16}$$

gegeben. Für $a = 0$ ist der Grenzwert $a \rightarrow 0$ zu nehmen. Weiters ist ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma = 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ und } \beta\delta = 0; \\ 0, & \text{falls } \beta\delta \operatorname{sign}(\alpha\delta - \beta\gamma) < 0. \end{cases} \tag{9.3-17}$$

gegeben.

Zu beachten ist noch, da der Ausdruck in geschweiften Klammern nur bei $\alpha = \gamma = 0$ auftritt!

9.4. Verbesserung der Lösung für $a = 0$

Für die gewöhnliche Wellengleichung haben wir zwei Lösungsdarstellungen, nämlich die Darstellung als Fourierreihe aus Kapitel 9.1 und die d'Alembertsche Lösung. Es ist also

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\hat{f}(x+ct) + \hat{f}(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \hat{F}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
&= \left\{ c_0(f) + c_0(g)t + \int_0^t (t-\tau)A_0(\tau) d\tau \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(f) \cos \mu_n ct + \frac{c_n(g)}{\mu_n c} \sin \mu_n ct + \frac{1}{\mu_n c} \int_0^t \sin \mu_n c(t-\tau)A_n(\tau) d\tau \right) \\
&\quad \cdot (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x).
\end{aligned} \tag{9.4-1}$$

Weiters haben wir für R_n und S_n die asymptotischen Darstellungen

$$R_n(t) \sim \exp(-dt) \cos \mu_n ct, \quad S_n(t) \sim \exp(-dt) \frac{\sin \mu_n ct}{\mu_n c}. \tag{9.4-2}$$

Damit läßt sich die Lösung aus Satz 9.1 umformen, indem wir das $\exp(-dt)$ -fache der d'Alembertschen Lösung herausheben.

Satz 9.10.

Die Lösung der gedämpften Wellengleichung mit $a = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x, t) = \exp(-dt) & \left(\frac{1}{2}(\hat{f}(x+ct) + \hat{f}(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \hat{g}(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \hat{F}(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) \\
&+ \left\{ c_0(f)(R_0(t) + dS_0(t) - \exp(-dt)) + c_0(g)(S_0(t) - t \exp(-dt)) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t (S_0(t-\tau) - (t-\tau) \exp(-dt)) A_n(\tau) d\tau \right\} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(f)(R_n(t) + dS_n(t) - \exp(-dt) \cos \mu_n ct) + c_n(g) \left(S_n(t) - \exp(-dt) \frac{\sin \mu_n ct}{\mu_n c} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \left(S_n(t-\tau) - \exp(-dt) \frac{\sin \mu_n c(t-\tau)}{\mu_n c} \right) A_n(\tau) d\tau \right) \cdot (\alpha \sin \mu_n x - \beta \mu_n \cos \mu_n x)
\end{aligned} \tag{9.4-3}$$

Alle auftretenden Größen sind wie in Satz 9.6 mit $a = 0$ definiert.

Wegen der asymptotischen Darstellungen für R_n und S_n ergeben sich hier wesentlich bessere Fehlerabschätzungen⁰.

⁰ siehe Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. IV 26. p112ff.

æ

10. Die Laplacegleichung

10.1. Die Laplacegleichung im Rechteck

Definition 10.1.

Es sei G ein Gebiet das von einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve C umrandet wird, so definiert man die Laplacegleichung durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F, \quad (x, y) \in G; \\ u + h \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in C, \text{ und } h \geq 0. \end{aligned} \quad (10.1-1)$$

Ähnliche Probleme werden in Carslaw⁰ behandelt. Um dieses Problem im Rechteck zu lösen genügt es folgendes Problem zu behandeln

Definition 10.2.

Wir betrachten die inhomogene Laplacegleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= F, \quad x \in (0, L), y \in (0, M); \\ u(x, 0) - h \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0, \quad u(x, M) + h \frac{\partial u}{\partial y}(x, M) = f(x), \quad h \geq 0; \\ u(0, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, \quad u(L, y) + h \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0. \end{aligned} \quad (10.1-2)$$

Beachte, diese Randbedingungen entsprechen physikalischen Randbedingungen im Sinne der Definition 1.2. Der Separationsansatz $u = XY$ liefert für die homogene Gleichung

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const.}$$

⁰ Carslaw, H. S., Jaeger J. C.: Conduction of Heat in Solids, chap. V p162ff.

Daher erfüllt X die Schwingungsgleichung

$$X'' + \lambda X = 0;$$

phys. Rb.

Da wir in diesem Kapitel nur spezielle physikalische Randbedingungen betrachten, wollen wir hier die Ergebnisse für die Eigenfunktionen zusammenstellen. Man erhält sie unmittelbar aus den Ergebnissen aus Kapitel 1.2 durch Einsetzen der entsprechenden Koeffizienten der Randbedingungen.

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= \sin \mu_n x + h \mu_n \cos \mu_n x; \\ \mu_n > 0 \quad &\text{löst} \quad (1 - h^2 \mu^2) \sin \mu L + 2h\mu \cos \mu L = 0; \\ \lambda_n = \mu_n^2, \quad &0 \text{ ist kein Eigenwert;} \\ \|\phi_n\|^2 &= (1 + h^2 \mu_n^2) \frac{L}{2} + h \quad \text{und} \quad \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2} \leq \frac{2}{L}.\end{aligned}\tag{10.1-3}$$

Wir wenden nun die partielle Fouriertransformation

$$\begin{aligned}a_n(y) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L u(x, y) \phi_n(x) dx; \\ A_n(y) &= \frac{1}{\|\phi_n\|^2} \int_0^L F(x, y) \phi_n(x) dx.\end{aligned}$$

auf die Differentialgleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}a_n'' - \mu_n^2 a_n &= A_n; \\ a_n(0) - h a_n'(0) &= 0; \\ a_n(M) + h a_n'(M) &= c_n(f).\end{aligned}$$

wobei $c_n(f)$ der gewöhnliche Fourierkoeffizient von f bezüglich ϕ_n ist. Die Greensche Funktion dieser Differentialgleichung lautet ⁰

$$\begin{aligned}G(y, \eta) &= \frac{-1}{\mu_n W} \begin{cases} (\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y) (\sinh \mu_n (M - \eta) + h \mu_n \cosh \mu_n (M - \eta)), & y < \eta; \\ (\sinh \mu_n \eta + h \mu_n \cosh \mu_n \eta) (\sinh \mu_n (M - y) + h \mu_n \cosh \mu_n (M - y)), & \eta < y. \end{cases} \quad (10-4) \\ \text{mit } W &= (1 + h^2 \mu_n^2) \sinh \mu_n M + 2h \mu_n \cosh \mu_n M.\end{aligned}$$

und daraus

$$a_n(y) = \frac{c_n(f)(\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y)}{W} + \int_0^M G(y, \eta) A_n(\eta) d\eta. \tag{10.1-5}$$

Damit erhalten wir für die Lösung $u = \sum a_n(y) \phi_n(x)$

⁰ siehe z.B.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p26f.

Satz 10.1.

Die Lösung der inhomogenen Laplacegleichung aus Definition 10.2 ist gegeben durch⁰

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) (\sin \mu_n x + h \mu_n \cos \mu_n x); \\
 a_n(y) &= \frac{1}{W} c_n(f) (\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y) + \int_0^M G(y, \eta) A_n(\eta) d\eta, \quad n = 1, 2, \dots \\
 G(y, \eta) &= \frac{-1}{\mu_n W} \begin{cases} (\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y) (\sinh \mu_n (M - \eta) + h \mu_n \cosh \mu_n (M - \eta)), & y < \eta; \\ (\sinh \mu_n \eta + h \mu_n \cosh \mu_n \eta) (\sinh \mu_n (M - y) + h \mu_n \cosh \mu_n (M - y)), & \eta < y. \end{cases} \\
 W &= (1 + h^2 \mu_n^2) \sinh \mu_n M + 2h \mu_n \cosh \mu_n M; \\
 c_n(f) &= \frac{2}{(1 + h^2 \mu_n^2) L + 2h} \int_0^L f(x) (\sin \mu_n x + h \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
 A_n(y) &= \frac{2}{(1 + h^2 \mu_n^2) L + 2h} \int_0^L F(x, y) (\sin \mu_n x + h \mu_n \cos \mu_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
 \mu_n &> 0 \text{ löst} \\
 (1 - h^2 \mu^2) \sin \mu L + 2h \mu \cos \mu L &= 0.
 \end{aligned}$$

(10.1–6)

Um die Fehlerabschätzungen angeben zu können, beweisen wir folgenden Hilfsatz

Hilfsatz 10.1.

Für die Funktion

$$f(x) = \frac{\sinh Mx + hx \cosh Mx}{(1 + h^2 x^2) \sinh Mx + 2hx \cosh Mx}, \quad x > 0, h \geq 0. \quad (10.1-7)$$

gilt: $f(x) \equiv 1$ falls $h = 0$ und falls $h \neq 0$, so ist f auf dem Intervall $(0, \infty)$ von $\frac{M+h}{M+2h} \leq 1$ monoton auf 0 fallend.

Der Fall $h = 0$ ist trivial. Bei $h > 0$ erhält man mit der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh Mx + hx \cosh Mx}{(1 + h^2 x^2) \sinh Mx + 2hx \cosh Mx} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{M \cosh Mx + h \cosh Mx + Mhx \sinh Mx}{2h^2 x \sinh Mx + M(1 + h^2 x^2) \cosh Mx + 2h \cosh Mx + 2Mhx \sinh Mx} \\
 &= \frac{M + h}{M + 2h}.
 \end{aligned}$$

und weiters

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tanh Mx/x + h}{(1/x + h^2 x) \tanh Mx + 2h} = 0.$$

Um die Monotonie zu zeigen betrachten wir die Darstellung $f(x) = g(x)/h(x)$ mit

$$g(x) = \tanh Mx + hx;$$

$$h(x) = (1 + h^2 x^2) \tanh Mx + 2hx.$$

⁰ vgl.: Butkovskiy, A. G.: Green's Functions and Transfer Functions Handbook, p131.

Für sie gilt

$$g'(x) = \frac{M}{\cosh^2 Mx} + h > 0;$$

$$h'(x) = \frac{(1 + h^2 x^2)M}{\cosh^2 Mx} + 2h^2 x \tanh Mx + 2h > g'(x) > 0.$$

Ist nun $\mu < \nu$, so gilt $g(\nu) = g(\mu) + c$, $c > 0$ und $h(\nu) = h(\mu) + d$, $d > 0$. Wegen $h'(x) > g'(x)$ gilt zusätzlich $d > c$. Aus $h(0) = g(0) = 0$ und $h'(x) > g'(x)$ folgt weiters $0 < g(x) < h(x)$, falls $x > 0$ ist. Daraus erhalten wir

$$g(\mu)h(\mu) + ch(\mu) < g(\mu)h(\mu) + dg(\mu).$$

und nach Division durch $h(\mu)(h(\mu) + d)$

$$f(\nu) = \frac{g(\nu)}{h(\nu)} = \frac{g(\mu) + c}{h(\mu) + d} < \frac{g(\mu)}{h(\mu)} = f(\mu).$$

Wir haben also auch die Monotonie gezeigt. $\square$

Mit Hilfe obigen Hilfsatzes berechnen wir nun eine Fehlerabschätzung für $f \neq 0$, $F \equiv 0$.

$$|u - S_N|^2 = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n(f) \frac{\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y}{W} \phi_n(x) \right|^2$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y)^2}{W^2} \cdot \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2}, \quad (\text{CBS-Ungl.})$$

Es ist nach Hilfsatz 10.1

$$\frac{\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y}{W} \leq \frac{\sinh \mu_n M + h \mu_n \cosh \mu_n M}{W} = f(\mu_n) \leq f(\mu_{N+1}) =: C(N+1).$$

und daher

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\sinh \mu_n y + h \mu_n \cosh \mu_n y)^2}{W^2} \cdot \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2} \leq C^2(N+1) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n \|\phi_n\|^2} \leq C^2(N+1) \frac{2L}{\pi^2} \psi'(N+\vartheta).$$

Den ersten Faktor schätzen wir wie gewohnt ab.

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n c_n^2(f) \|\phi_n\|^2 \leq \int_0^L f'^2(x) dx + H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 c_n^2(f) \|\phi_n\|^2.$$

Satz 10.2.

Ist $f \in \mathcal{C}[0, L]$, $\int_0^L f'^2(x) dx < \infty$ und erfüllt f die wesentlichen Randbedingungen, $F \equiv 0$, so erfüllt die Reihe für u aus Satz 10.1 für $x \in [0, L]$ und $y \in [0, M]$ die Fehlerabschätzung

$$\boxed{|u(x, t) - S_N(x, t)| \leq \frac{L}{\pi} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f'^2(x) dx + \frac{2}{L} H[f] - \sum_{n=1}^N \mu_n^2 \left(1 + h^2 \mu_n^2 + \frac{2h}{L} \right) c_n^2(f) \right)^{1/2}} \quad (10.1-8)$$

$$C(N+1) \sqrt{\psi'(N+\vartheta)}.$$

wobei $S_N(x, t)$ die N -te Partialsumme der Reihe für u ist. Weiters ist

$$C(N+1) = \frac{\sinh \mu_{N+1} M + h \mu_{N+1} \cosh \mu_{N+1} M}{(1 + h^2 \mu_{N+1}^2) \sinh \mu_{N+1} M + 2h \mu_{N+1} \cosh \mu_{N+1} M} \leq 1. \quad (10.1-9)$$

sowie $H[f]$ durch

$$H[f] = \begin{cases} 0, & \text{falls } h = 0; \\ (f(L)^2 + f(0)^2)/h, & \text{falls } h > 0. \end{cases} \quad (10.1-10)$$

und ϑ durch

$$\vartheta = \begin{cases} 1, & \text{falls } h = 0; \\ 0, & \text{falls } h > 0. \end{cases} \quad (10.1-11)$$

gegeben.

Die Lösung aus Satz 10.1 ist unsymmetrisch in x und y , obwohl dies für die Differentialgleichung gilt. Um dies zu erreichen müte man u in eine Fourierdoppelreihe entwickeln.⁰ Wir haben dies nicht weiter verfolgt, da solche Reihen wesentlich schlechter konvergieren. Sie werden daher erst bei höheren Dimensionen benützt. Es lassen sich aber dennoch mit der gleichen Methode Fehlerabschätzungen angeben, die jetzt aber schlechter konvergieren und größere Regularität von den zu entwickelnden Funktionen verlangen.

⁰ siehe: Weinberger, H. F.: A First Course in Partial Differential Equations, chap. VI 31.–35. p141ff.